2018 年度 線形代数学 II（生物学コース・物質循環学コース）演習問題 11

担当：境 圭一

※スペース節約のため，ベクトルを横に書きます．縦で書き直した方が計算しやすいと思います．

1. 次の線形写像 f, g, h について，与えられた基底に関する表現行列を求めよ．f, g, h は単射か？また全射か？
   (1) $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$,　$f(x,\ y) = (x-3y,\ x+3y)$,　$\mathbf{R}^2$ の基底 $\boldsymbol{u}_1 = (1,\ 1), \boldsymbol{u}_2 = (-2,\ 1)$
   (2) $g\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$,　$g(x,\ y,\ z) := (2x+3y-z,\ x+y,\ y-z)$,　$\mathbf{R}^3$ の基底 $\boldsymbol{u}_1 = (0,\ 1,\ 1), \boldsymbol{u}_2 = (1,\ 0,\ 1), \boldsymbol{u}_3 = (1,\ 1,\ 0)$
   (3) $h\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$,　$h(x,\ y) := (x+2y,\ 2x+3y,\ -x)$,　$\mathbf{R}^2$ の基底 $\boldsymbol{u}_1 = (1,\ 1), \boldsymbol{u}_2 = (-1,\ 1)$,　$\mathbf{R}^3$ の基底 $\boldsymbol{v}_1 = (1,\ 0,\ 2)$, $\boldsymbol{v}_2 = (0,\ -1,\ 1), \boldsymbol{v}_3 = (1,\ 1,\ 0)$
2. （教科書 p. 147 参照）線形写像 $f\colon V \to W$ が，V の基底 $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n$ と W の基底 $\boldsymbol{w}_1, \dots, \boldsymbol{w}_m$ に関して行列 A で表現されているとする．このとき次のことを示せ．
   (1) $\dim \operatorname{Im} f = \operatorname{rank} A$
   (2) $\dim \operatorname{Ker} f = n - \operatorname{rank} A$
   (3) f が全射 $\iff$ $\operatorname{rank} A = m$
   (4) f が単射 $\iff$ $\operatorname{rank} A = n$
   (5) f が全単射 $\iff$ $\operatorname{rank} A = m = n$
3. (1) ベクトル空間 V に対し，$\mathrm{id}\colon V \to V$ を $\mathrm{id}(\boldsymbol{x}) := \boldsymbol{x}$ で定め，V の**恒等写像** (identity map) とよぶ．id は線形写像であることを示せ．
   (2)（教科書 p. 143, 命題 5.7 (2) 参照）$\{\boldsymbol{u}_i\}_{i=1}^n, \{\boldsymbol{v}_i\}_{i=1}^n$ がともに V の基底であるとする．$\{\boldsymbol{u}_i\}_i$ を id の定義域 V の基底，$\{\boldsymbol{v}_i\}_i$ を値域 V の基底とみなすと（教科書の記号を使えば，$\mathrm{id}\colon V\{\boldsymbol{u}_i\}_i \to V\{\boldsymbol{v}_i\}_i$ とみなすと），これらに関する id の表現行列は，$\{\boldsymbol{u}_i\}_i$ から $\{\boldsymbol{v}_i\}_i$ への基底の変換行列であることを示せ．

補足． ベクトル空間 V, W に基底 $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n$ と $\boldsymbol{w}_1, \dots, \boldsymbol{w}_m$ が与えられている状況では，V, W はそれぞれ $h_V(\boldsymbol{v}_i) := \boldsymbol{e}_i$, $h_W(\boldsymbol{w}_j) := \boldsymbol{e}_j$ で定義される同型写像 $h_V\colon V \xrightarrow{\cong} \mathbf{K}^n$ と $h_W\colon W \xrightarrow{\cong} \mathbf{K}^m$ により $\mathbf{K}^n, \mathbf{K}^m$ と同一視されます．教科書の 141 ページあたりで「基底を固定して考えるときに $V\{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n\}$ のように表す」という言い方をしているところです．この同一視のもと，線形写像 $f\colon V \to W$ は線形写像 $g\colon \mathbf{K}^n \to \mathbf{K}^m$ に対応します：

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h_V"', "\cong"] & W \arrow[d, "h_W"', "\cong"] \\ \mathbf{K}^n \arrow[r, "g"] & \mathbf{K}^m \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \boldsymbol{v} \arrow[r, mapsto, "f"] \arrow[d, mapsto, "h_V"'] & f(\boldsymbol{v}) \arrow[d, mapsto, "h_W"] \\ h_V(\boldsymbol{v}) \arrow[r, mapsto, "g"] & h_W(f(\boldsymbol{v})) \end{tikzcd}$$

上の行では $\boldsymbol{v}$ と $f(\boldsymbol{v})$ が f で対応しています．これらを同型写像 h_V, h_W で下の行にうつしたベクトル $h_V(\boldsymbol{v})$ と $h_W(f(\boldsymbol{v}))$ は g によって対応している，つまり $g(h_V(\boldsymbol{v})) = h_W(f(\boldsymbol{v}))$ が成り立っているわけです．もう少し平たく言うと，f と g の対応は次の通りです：

$$\text{各 } 1 \leq j \leq n \text{ に対し } f(\boldsymbol{v}_j) = \sum_{i=1}^m a_{ij}\boldsymbol{w}_i \quad \text{とすれば} \quad g(\boldsymbol{e}_j) = \sum_{i=1}^m a_{ij}\boldsymbol{e}_i \tag{$*$}$$

上の a_{ij} を使って $m \times n$ 行列 $A = \left(a_{ij}\right)_{1\leq i\leq m,\ 1\leq j\leq n}$ を考えると，上の $(*)$ を並べて

$$\begin{pmatrix} f(\boldsymbol{v}_1) & \cdots & f(\boldsymbol{v}_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{w}_1 & \cdots & \boldsymbol{w}_m \end{pmatrix} A \tag{$**$}$$

を得ます．この行列 A を，基底 $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n$ と $\boldsymbol{w}_1, \dots, \boldsymbol{w}_m$ に関する f の表現行列とよびます．$(*)$ より，f に対応する g は，表現行列を使って $g(\boldsymbol{u}) = A\boldsymbol{u}$ と表されることがわかります．この意味で，**すべての線形写像は本質的に，行列をかける写像です．**
表現行列は f だけでなく，V, W の基底（つまり，座標軸）も使って定まっていることが $(*)$ を見るとわかります．よって同じ線形写像 $f\colon V \to W$ でも，表現行列は基底の（つまり，座標軸の）取り方によって変化します．例えば

$\dim V = \dim W$ の場合，基底の取り方によっては，表現行列が**対角行列** (diagonal matrix)

$$\mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) := \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

になることもあります．λ はギリシャ文字でラムダと発音します．このような基底 $\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{w}_j$ に関しては，$(**)$ より

$$\begin{pmatrix} f(\boldsymbol{v}_1) & \cdots & f(\boldsymbol{v}_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \boldsymbol{w}_1 & \cdots & \lambda_m \boldsymbol{w}_m \end{pmatrix}, \quad \text{つまり} \quad f(\boldsymbol{v}_i) = \lambda_i \boldsymbol{w}_i$$

となります．表現行列が対角行列になるような基底（座標軸）に関しては f は座標軸方向のスカラー倍になっている，ということで，一般的な行列をかける写像に比べて圧倒的に見やすいことがわかります．このような基底はいつでも存在するわけではありませんが，どのような場合に存在するのか，それはどのようにして見つけることができるのか，というのが残りの講義のテーマです．

問題 1 の (1), (2) は $V = W$ の場合で，定義域と値域で共通の基底を取る，という意味です．例えば (1) では $\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{w}_i = \boldsymbol{u}_i$ $(i = 1, 2)$ ということです．