**2018 年度 線形代数学 II（生物学コース・物質循環学コース）演習問題 12**

担当：境 圭一

1. $i = \sqrt{-1}$ とする．次の行列 $A_k$ の固有値と，それらに属する固有空間の基底を求めよ．また固有値の積を計算し，$\det A$ と比較せよ．

(1) $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ (2) $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ (3) $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ (4) $A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix}$ (5) $A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 13 & -7 \\ -5 & 19 & -10 \end{pmatrix}$

(6) $A_6 = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 3i & -1+2i & -1+i \\ i & 1+2i & 1-i \\ -i & 1-2i & 1+i \end{pmatrix}$ (7) $A_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & -1 \\ -2 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ ※一部は「線形代数演習」（斎藤正彦著，東京大学出版会）から借用しました

2. $A$ を $n \times n$ 行列とする．

(1) $\phi_A$ は $t$ の $n$ 次多項式で，$t^n$ の係数は 1 であることを示せ．（ヒント：行列式の定義（教科書 62 ページ）を使う．$tE_n - A = (b_{ij})_{i,j=1}^n$, つまり $i \neq j$ のとき $b_{ij} = -a_{ij}$, $i = j$ のとき $b_{ii} = t - a_{ii}$ とおくとき，$b_{1\sigma(1)} \cdots b_{n\sigma(n)}$ には $t$ は高々 $n$ 回しか現れず，$t^n$ が現れるような $\sigma \in S_n$ は恒等置換しかないことを示せばよい）

(2) $\phi_A(t)$ の $t^{n-1}$ の係数は $-\mathrm{tr}\,A$ であることを示せ．ただし，一般に正方行列 $C = (c_{ij})_{i,j=1}^n$ に対し，$\mathrm{tr}\,C = \sum_{i=1}^n c_{ii}$ である．（ヒント：(1) と同様．$b_{1\sigma(1)} \cdots b_{n\sigma(n)}$ に $t^{n-1}$ が現れるような $\sigma \in S_n$ も恒等置換しかない）

(3) $\phi_A(t)$ の定数項は $(-1)^n \det A$ であることを示せ．（ヒント：多項式の定数項は $\phi_A(0)$ である）

(4) $A$ の固有値を重複も込めて $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ とするとき，$\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = \mathrm{tr}\,A$, $\lambda_1 \cdots \lambda_n = (-1)^n \det A$ であることを示せ．（ヒント：$\phi_A(t)$ に対する解と係数の関係を使う）

3. 対角成分が順に $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ であるような $n \times n$ 対角行列 (diagonal matrix) を $\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ と表す．

(1) $A = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ のとき，自然数 $k$ に対し，$A^k = \mathrm{diag}(\lambda_1^k, \ldots, \lambda_n^k)$ であることを示せ．

(2) 一般に，$n \times n$ 行列 $B$ の**指数関数** $\exp(B) := \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} B^k$ は収束することが知られている．$A = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ のとき，$\exp(A) = \mathrm{diag}(e^{\lambda_1}, \ldots, e^{\lambda_n})$ であることを示せ．

(3) 対角行列とは限らない $n \times n$ 行列 $B$ に対し，ある $n \times n$ 正則行列 $P$ が存在して $P^{-1}BP = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ となるとするとき，$\exp(B) = P\mathrm{diag}(e^{\lambda_1}, \ldots, e^{\lambda_n})P^{-1}$ を示せ．

補足．

(i) $\lambda$ はラムダ，$\phi$ はファイまたはフィーと発音します．これらはギリシャ文字です．空集合（要素を含まない集合）を表す記号 $\emptyset$ はゼロに斜線を重ねたもので，$\phi$ とは違いますから注意してください．高校の教科書ではしばしばこれらを混同しているようです．（そういう仕様で仕方ない？）

(ii) $\lambda \in \mathbf{C}$ が $n \times n$ 行列 $A$ の固有値であるとは，$\lambda$ が $A$ の固有方程式 $\phi_A(t) = \det(\lambda E_n - A) = 0$ の解であることと同値です．$\phi_A$ は $n$ 次多項式なので，複素数の範囲では $\phi_A(t) = 0$ の解，つまり $A$ の固有値は重複も込めて $n$ 個あります．実数の範囲では，このように確たることは言えません．スカラーを複素数にしたのはこのことが理由です．

(iii) 今後の目標は正方行列 $A$ の対角化，つまり $P^{-1}AP$ が対角行列になるような $P$ を見つけることです．今回の問題 3 は対角化の恩恵の 1 つです．$\exp(B)$ の定義は複雑ですが，いったん対角化しておくと計算が容易になります．

(iv) 対角化はいつでもできるわけではありませんが，対角化可能な場合の例として，$A$ の固有値 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ に重複がないときを考えます．$\lambda_i$ に属する固有ベクトル $\boldsymbol{x}_i \neq \mathbf{0}$（縦ベクトル）を取り $P = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1 & \cdots & \boldsymbol{x}_n \end{pmatrix}$ とおくとき，

$$AP = \begin{pmatrix} A\boldsymbol{x}_1 & \cdots & A\boldsymbol{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1\boldsymbol{x}_1 & \cdots & \lambda_n\boldsymbol{x}_n \end{pmatrix} = P\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$$

となることを確かめてみてください（記号は問題 3 を参照）．実は $P$ は正則で，$P^{-1}AP = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ です．つまり $A$ は対角化されます．以上のことはこのあとの講義でやります．