**2018 年度 線形代数学 II（生物学コース・物質循環学コース）演習問題 13**

担当：境 圭一

1. 演習問題 12-1 の $A_1, \dots, A_7$ について，対角化可能かどうか判定し，可能な場合は $P^{-1}AP$ が対角行列になるような $P$ を一つ求めよ．
2. 縦ベクトル $\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n \in \mathbf{C}^n$ を横に並べてできる複素 $n \times n$ 行列を $P = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1 & \cdots & \boldsymbol{x}_n \end{pmatrix}$ とおく．
   (1) $A$ を $n \times n$ 行列とするとき，$AP = \begin{pmatrix} A\boldsymbol{x}_1 & \cdots & A\boldsymbol{x}_n \end{pmatrix}$ であることを確かめよ．
   (2) $\boldsymbol{x}_i$ を $A$ の固有値 $\lambda_i$ に属する固有ベクトルとする．対角成分が順に $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ であるような $n \times n$ 対角行列 (diagonal matrix) を $\mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ と表すとき，$P\mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1\boldsymbol{x}_1 & \cdots & \lambda_n\boldsymbol{x}_n \end{pmatrix}$ であることを確かめよ．
3. (1) $k$ を定数とする．微分方程式 $x'(t) = k \cdot x(t)$ の解は $x(t) = ce^{kt}$（ただし $c$ は定数）の形になることを示せ．
   (2) $A := \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ とおく．$P^{-1}AP$ が対角行列になるような $2 \times 2$ 正則行列を一つ求めよ．
   (3) 連立微分方程式
   $$\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1(t) + 2x_2(t) \\ -3x_1(t) + 4x_2(t) \end{pmatrix}$$
   を，$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} := P^{-1} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ とおいて解け．

補足．以下，$A$ は $n \times n$ 行列であるとします．

(i) $A$ が対角化できる場合，$P^{-1}AP = \mathrm{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)$ とすると（記号については問題 2 を参照），$\mu_1, \dots, \mu_n$ は必ず $A$ の固有値です．なぜなら，講義でやった命題 9.7 (1) より $\phi_A(t) = \phi_{P^{-1}AP}(t)$ ですが，明らかに
$$\phi_{P^{-1}AP}(t) = \det\left(\mathrm{diag}(t - \mu_1, \dots, t - \mu_n)\right) = (t - \mu_1) \cdots (t - \mu_n)$$
ですから，$\mu_1, \dots, \mu_n$ は $\phi_A(t) = 0$ の解，つまり $A$ の固有値です．

(ii) $A$ が対角化できる場合，対角成分の固有値の順序は自由に調節できます．固有値を $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ の順に並べたいとしたら，対応する固有ベクトル $\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n$ を同じ順に並べて行列 $P = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1 & \cdots & \boldsymbol{x}_n \end{pmatrix}$ を作れば，$P^{-1}AP = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ になります．

(iii) 対角化できることの応用として，演習問題 12 では行列の指数関数のことを扱いましたが，今回の問題 3 は連立線形微分方程式への応用です．この講義の初回で配布したプリントに書かれている内容です．簡単のため 2 つの方程式の場合を考えましたが，$n$ 個の場合への拡張も容易でしょう．