2018 年度 線形代数学 II（火曜 2 限，生物学コース・物質循環学コース）

担当：境 圭一

1. 講義の内容，成績など．

(1) **必修科目です．** ベクトル空間・線形写像などの初歩的な部分を抽象的に扱います．

(2) 教科書は「基礎理学 線形代数学」（数学教科書編集委員会編，学術図書出版社）です．生協で購入できます．第 4 章〜第 7 章の内容を扱います．

(3) **成績は，中間試験と期末試験，ならびにレポートの状況により判定します．** 中間・期末試験とも 50 点満点，計 100 点満点です．このほかに数回のレポートを課します（20 点程度相当の予定）．これらの合計が 60〜69 点なら「可」，70〜79 点なら「良」，などとします．**単位取得のためには，中間試験と期末試験の両方を受験することを必須とします．** 追試の類は行いません．

(4) 中間試験は 11/20（火）2 限，期末試験は 1/29（火）2 限の予定です．変更がある場合は追って連絡します．

(5) 出席状況は，成績評価には用いません．

(6) この講義に関する連絡事項は以下の URL に掲載します．
`http://math.shinshu-u.ac.jp/~ksakai/18_linear2/18_linear2.html`

(7) この講義に演習はついていませんが，演習問題などの情報は上記 URL に随時掲載します．

(8) 講義中であっても遠慮なく質問してください．講義外でも随時受け付けます．研究室（理学部 A 棟 403）にお越しください．あらかじめ `ksakai@math.shinshu-u.ac.jp` 宛に連絡をもらえれば確実です．

(9) 数学に特有の記号などについては，前期に配布した資料をご覧ください．下記 URL にも置いてあります：
`http://math.shinshu-u.ac.jp/~ksakai/18_linear1/announce1.pdf`

(10) 12/25（火）は月曜振替となっており，この講義は行いません．

2. 線形代数学 II の内容について． 前期の「線形代数学 I」では行列に関する基礎的な内容を学びました．行列は数をたくさん並べたもので，いろいろな計算がとても大変だったと思います．例えば行列の積を考えるとき，数がでたらめに並んだ行列はとても面倒で，0 を多く含む行列は比較的扱いやすいことを経験的に学んだと思います．

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 12 \\ -4 & -7 \end{pmatrix} \quad \text{と} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

であれば，A よりは B のほうが何かと簡単だと感じるはずです．このあたりを，**微分方程式**を例にとって考えてみます．これは微分を含む関数の等式で，最も典型的なものは

$$f'(x) = af(x) \quad (a \text{ は定数で } a \neq 0) \tag{a}$$

といったものです．例えば，水や風の流れの様子などを記述しようとするときに使われるものです．
方程式 (a) をみたす関数 f は，(a) の両辺を $f(x)$ で割ると $\dfrac{f'(x)}{f(x)} = a$ となることから（本当は $f(x) = 0$ となる場合がないか注意する必要がありますが），両辺を積分して $\log|f(x)| = ax + b$ (b は定数), よって $f(x) = ce^{ax}$ と求められます ($c := \pm e^b$ とおいた).
これくらいなら比較的容易ですが，より複雑な形になったり，関数がたくさん入り乱れたりすると厄介です．例えば

$$f'(x) = 7f(x) + 12g(x), \quad g'(x) = -4f(x) - 7g(x) \tag{b}$$

を同時にみたす関数 $f(x), g(x)$ を求めよ，という問題は (a) のように簡単ではなさそうに見えます．しかし線形代数学の知識があると，(b) は (a) と同じ問題だということが，次のようにしてわかります．(b) は

$$\begin{pmatrix} f'(x) \\ g'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 12 \\ -4 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(x) \\ g(x) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} f(x) \\ g(x) \end{pmatrix} \tag{c}$$

のように行列とベクトルの積の形で表せます．線形代数学 II で学ぶ知識があると

$$P = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{とおけば} \quad P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = B \tag{d}$$

ということに比較的容易に気づくことができます．前期の復習として，P^{-1} を求め，(d) を確認してみてください．(d) を踏まえて $\begin{pmatrix} F(x) \\ G(x) \end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix} f(x) \\ g(x) \end{pmatrix}$ とおくと，(c) より

$$\begin{pmatrix} F'(x) \\ G'(x) \end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix} f'(x) \\ g'(x) \end{pmatrix} = P^{-1}A\begin{pmatrix} f(x) \\ g(x) \end{pmatrix} = P^{-1}AP\left(P^{-1}\begin{pmatrix} f(x) \\ g(x) \end{pmatrix}\right) = B\begin{pmatrix} F(x) \\ G(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F(x) \\ -G(x) \end{pmatrix} \tag{e}$$

となります．(e) は $F'(x) = F(x)$ かつ $G'(x) = -G(x)$ を意味しますが，これらは (a) と全く同様で，$F(x) = ke^x$, $G(x) = le^{-x}$ (k, l は定数) がわかります．あとは $\begin{pmatrix} f(x) \\ g(x) \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} F(x) \\ G(x) \end{pmatrix}$ を使って $f(x)$ と $g(x)$ を求められます．
この解法はとても見通しよいものだと思います．ポイントは (d) のような P を見つけることです（行列の**対角化**という）．今は 2×2 行列でしたから，もしかしたら闇雲な計算でも見つかるかもしれませんが，より関数の数が増えて行列のサイズも大きくなっていくと，何らかの組織的な方法なしには P を見つけられなくなります．こういった方法を学ぶのが目標の 1 つです．

前期に書いたことを繰り返します．
以上のような具体的な動機もありますが，数学を学ぶ目的として最も重要なのは，**物事を筋道立てて考える能力を養うこと**です．大学の数学は抽象的で難しく見えますが，辛抱強く論理を追えば必ず解決に至るようにできています．世の中はそうはできていなくてハードルが高いので，まずは安全にできている数学でトレーニングするわけです．計算も大事ですが，それは計算機に任せてもよいことです．人間が頭を使う部分のほうが大切です．