2018 年度 線形代数学 II（生物学コース・物質循環学コース）レポート問題 1 コメント

担当：境 圭一

$\dim \mathbf{R}^4 = 4$ ですから，$\mathbf{R}^4$ の基底は必ず 4 つのベクトルの組です．一般に，$\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_4 \in \mathbf{R}^4$ が $\mathbf{R}^4$ の基底であるとは，次の (1), (2) の**両方**をみたすことです：

(1) $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_4$ は **1 次独立**，つまり $r_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + r_4\boldsymbol{u}_4 = \mathbf{0}$ をみたす $r_1, \ldots, r_4$ は $r_1 = \cdots = r_4 = 0$ に限る
(2) $\mathbf{R}^4 = \langle \boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_4 \rangle$, つまり $\mathbf{R}^4$ のすべてのベクトルは $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_4$ の 1 次結合で表せる

逆に言うと，(1), (2) の一方でもみたされなければ（もう一方がみたされたとしても）$\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_4$ は $\mathbf{R}^4$ の基底ではありません．
まず $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_4$ が上の (1) をみたすかを調べてみます．

$$r_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + r_4\boldsymbol{v}_4 = \mathbf{0} \tag{a}$$

と仮定してみて，これを $r_1, \ldots, r_4$ に関する連立 1 次方程式とみなして解を求めようとすると，（n に関係なく）どうしても解が 1 つに定まりません．実は $(r_1, \ldots, r_4) = (k, 2k, -k. -k)$（ただし k は定数）はすべて (a) の解になっていて，例えば $k = 1$ の場合を考えれば

$$\boldsymbol{v}_1 + 2\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_3 - \boldsymbol{v}_4 = \mathbf{0} \tag{b}$$

が成立しています．これは (a) の解が $r_1 = \cdots = r_4 = 0$ 以外にもある，ということですから，$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_4$ は 1 次独立ではありません．この時点で上の (2) について考察する必要はなくなり，n によらず全員「基底ではない」が正解です．

(a) の解が $r_1 = \cdots = r_4 = 0$ に決まる場合はそれでいいのですが，今回のように決まらないときは，本当に決まらないのか，本当は決まるのに何か条件を見落としているのか，判断がつかないことがあります．不安を解消するためには，$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_4$（縦ベクトルで表しておく）を横に並べてできる 4×4 行列

$$A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \boldsymbol{v}_3 & \boldsymbol{v}_4 \end{pmatrix}$$

の階数 $\operatorname{rank} A$ を調べるのが 1 つの手です．$\operatorname{rank} A = 4$ なら $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_4$ は 1 次独立であり，$\operatorname{rank} A \leq 3$ なら $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_4$ は 1 次独立ではありません．さらに今回の場合は A が 4 次正方行列なので，$\operatorname{rank} A = 4 \iff \det A \neq 0$ です．よって $\det A$ を計算すれば，1 次独立性についてはっきりしたことが言えます．

答案としては，(b) が成り立つことを成分計算で示し，「よって $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_4$ は 1 次従属だから，$\mathbf{R}^4$ の基底ではない」で十分です．なぜ (b) を示そうという発想に至ったか，という点は論理的には必要ない部分で，書く必要はありません．もちろん $\det A$ を計算して 0 になることを示してもよいと思います．**内容をよく吟味して必要十分な答案を書くよう心掛けると，大抵は短い文章で済むはずです．**
過程も含めて正しければ 10 点です．細かい計算はあまり見ていませんが，明らかに間違っていれば減点しています．(a) または $\operatorname{rank} A$, $\det A$ を考えようとしていれば，途中で計算を間違えたとしても 3 点程度つけています．具体的な計算なしに「$A = \cdots$ とおくと $\det A = 0$ である」と述べてあっても，本当に計算して 0 だと確かめたのか，根拠なく当てずっぽうで主張しているのかわかりません．読んで納得できる根拠がなければ大きく減点されます．

誤った記述の例を挙げます：

- 行列の基本変形の前後で行列は変化していますから，等号で結ぶのは誤りと言えます．
- △「$\operatorname{rank} A = \cdots = 3$. よって 1 次従属である」→○「$\operatorname{rank} A = \cdots = 3$. よって $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_4$ は 1 次従属である」
  主語がない文章が目立ちます．「何が」1 次従属なのか明確にすべきです．
- ×「 $\mathbf{R}^4$ は基底である」→○「$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_4$ は $\mathbf{R}^4$ の基底である」
- ×「 $\mathbf{R}^4$ の 4 つのベクトルの組は基底でない」→○「$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_4$ は基底でない」
  前者だと「$\mathbf{R}^4$ の 4 つのベクトルの組は，それが何であろうとも基底ではない」ということになってしまいます．もちろんそれは誤りで，例えば $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_4 \in \mathbf{R}^4$ は $\mathbf{R}^4$ の基底です．