2018 年度 線形代数学 II（生物学コース・物質循環学コース）レポート問題 2 略解・コメント

担当：境 圭一

固有値は $-1, n+1, 10-n$ で，それぞれに属する固有空間は，例えば

$$V(-1) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad V(n+1) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \right\rangle, \quad V(10-n) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} \right\rangle$$

と表せます．固有空間の基底の取り方はいろいろありますが，固有空間自体は n によりません．

固有値は t の方程式 $\phi_A(t) = \det(tE_3 - A) = 0$ の解として求められます．左辺は $(t+1)(t-(n+1))(t-(10-n))$ と因数分解されます．各自の n の値を代入して計算することはもちろん可能ですし，n を残したまま計算することもできます．後者の場合は $m = \sqrt{2}(2n-9)$ などとおいて計算すれば見通しよく因数分解できます．いずれにしても，分数のまま計算するのはミスのもとですから，1/4 はくくり出して計算するべきです．
固有値 -1 に属する固有空間は

$$V(-1) = \{\boldsymbol{u} \in \mathbf{C}^3 \mid (-E_3 - A)\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}\}$$

です．$f\colon \mathbf{C}^3 \to \mathbf{C}^3$ を $f(\boldsymbol{u}) := (-E_3 - A)\boldsymbol{u}$ で定めれば，$V(-1) = \operatorname{Ker} f$ とも表せます．いずれにしても，$V(-1)$ は連立方程式

$$(-E_3 - A)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -13 & -13 & -\sqrt{2}(2n-9) \\ -13 & -13 & -\sqrt{2}(2n-9) \\ -\sqrt{2}(2n-9) & -\sqrt{2}(2n-9) & -26 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

の解全体のなす部分空間です．この連立方程式をみたす (x, y, z) は，整数 n に関係なく

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (k \in \mathbf{C})$$

の形になります．$V(n+1), V(10-n)$ も同様です．

講義での話から，$\phi_A(t) = 0$ の解を求め，$(\lambda E_3 - A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ をみたす $\boldsymbol{x}$ を求め，…という手順は決まりきっているわけですが，それを暗黙の了解のように書くのは感心しません．例えば

$$\phi_A(t) = \cdots = t^3 - 10t^2 + (-n^2 + 11n - 22)t - (n+1)(n-10) \qquad t = -1, n+1, 10-n$$

などと書くのは不十分です．**$\boldsymbol{\phi_A(t) = 0}$ とすると** $t = -1, n+1, 10-n$, のように書かれるべきです．講義のレポートでは言葉足らずでも通じるかもしれませんが，例えば自分のことを外部にアピールするような文章を書く場合，読み手はこちらの都合など知らないわけですから，行間を読んでわかってもらおうなどというのは無理です．**こちらの言いたいことを過不足なく伝えるにはどうしたらよいか**，日頃から考えておかないと，必要なときにいきなりできるようにはなりません．
$\phi_A(t)$ を求めるときに 1/4 をくくりだしたほうがよい，ということを言いましたが，何人かの人が $\det \frac{1}{4}(tE_3 - 4A)$ を計算してしまい，正しい固有値の 4 倍を求めてしまっていました．もちろん $\det \frac{1}{4}(4tE_3 - 4A)$ が正解です．
また，最終的には因数分解して解を求めるわけですから，途中で式をすべて展開してしまうのは得策ではありません．可能な限り共通因子をくくり出してから，最後に展開すると楽になるはずです．