※ベクトル空間 $\mathbf{R}^n$ の和と実数倍は通常のもの，内積は Euclid 内積とする

※答案に書くベクトルは縦横どちらでもよい

※問題 4. (2) を除き，答案用紙には答のみ記入すること．途中経過が書かれていて誤りを含む場合は減点対象になり得るので注意すること．

各自の学籍番号の下 2 桁の和を $10a+b$ と表す．ただし a,b は整数で $0 \le a,b \le 9$ である．例えば 18S5067Y なら $(a,b)=(6,7)$, 18S6089Z なら $(a,b)=(8,9)$. この a,b の値は以下のすべての問で共通とする．

1. 次の集合は $\mathbf{R}^3$ の部分ベクトル空間かどうか答えよ．

(1) $W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 \;\middle|\; x + (a+1)y + (b+2)z = 1 \right\}$

(2) $W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 \;\middle|\; x = (a+1)y = (b+2)z \right\}$

2. 次のベクトルの組は $\mathbf{R}^n$ の基底かどうか答えよ．ただし (1), (2) では $n=3$, (3) では $n=4$ である．

(1) $\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{u}_3 = \begin{pmatrix} a+b \\ b \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3$

(2) $\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{u}_4 = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3$

(3) $\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{u}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{u}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^4$

3. 次の 1 次独立なベクトルの組 $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ に対し Gram-Schmidt の直交化法を（講義でやった順序で）適用して得られる正規直交系 $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_k$ を求めよ．ただし (1) では $k=2$, (2) では $k=3$, (3) では $k=4$ である．

(1) $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ a+1 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2$

(2) $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3$

(3) $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{v}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^4$

4. $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} a+1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ b-7 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 2(a+1) \\ b-3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^4$ とする．

(1) $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ は 1 次独立かどうか答えよ．また $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ は 1 次独立かどうか答えよ．

(2) $W = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$ とおく．$W \oplus W' = \mathbf{R}^4$ となるような部分ベクトル空間 $W' \subset \mathbf{R}^4$ の次元 $\dim W'$ を求めよ．計算過程も示すこと．

配点：10, 15, 15, 10（各小問につき 5 点，50 点満点）

http://math.shinshu-u.ac.jp/~ksakai/18_linear2/18_linear2.html