線形代数学 II（生物学コース・物質循環学コース）中間試験（2018 年 11 月 20 日）解答例・解説

担当：境 圭一

解答例.

1. (1) 部分ベクトル空間でない
   (2) 部分ベクトル空間である

2. (1) 基底である
   (2) 基底でない
   (3) 基底でない

3. (1) $\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

   (2) $\boldsymbol{u}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_2 = \dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_3 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

   (3) $\boldsymbol{u}_1 = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_2 = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_3 = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_4 = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

4. (1) $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ は 1 次独立であり，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ は 1 次独立でない．
   (2) $\boldsymbol{v}_3 = 2\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2$ だから，すべての $\boldsymbol{u} \in W = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$ は $\boldsymbol{u} = p\boldsymbol{v}_1 + q\boldsymbol{v}_2 + r\boldsymbol{v}_3 = (p+2r)\boldsymbol{v}_1 + (q+r)\boldsymbol{v}_2$ $(p, q, r \in \mathbf{R})$ と表せる．よって $W = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle$ である．$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ が 1 次独立であることから $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ は $W$ の基底であるので $\dim W = 2$ である．$\mathbf{R}^4 = W \oplus W'$ とするとき $\dim \mathbf{R}^4 = \dim W + \dim W'$ だから $4 = 2 + \dim W'$, よって $\dim W' = 2$.

解説．$a, b$ の値は答にも難易度にも一切影響しない．

1. 10/9 の演習問題を見てあれば容易なはず．ベクトル空間とは，おおむね「定数項が 0 の連立 1 次方程式で表される集合」だと思えばよい．

2. $\dim \mathbf{R}^n = n$ だから，$\mathbf{R}^n$ の基底は $n$ 個のベクトルからなる．この時点で (2) は $\mathbf{R}^3$ の基底でないことがわかる．$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n \in \mathbf{R}^n \cdots$ ☆は，それが 1 次独立なら基底で，1 次従属なら基底ではない．☆が 1 次独立であることと，これらを並べてできる $n \times n$ 行列が正則であることは同値だった．もちろん $r_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + r_n\boldsymbol{v}_n = \mathbf{0}$ の解が $r_1 = \cdots = r_n = 0$ に限るか否かを見てもよい．

3. 具体的な計算問題は，正しいかどうかを判断する材料に乏しいのでリスクが高い．しかし Gram-Schmidt の直交化法を行う問題に関しては，答が直交系になっているか確認するのが比較的容易なので，ある程度リスク回避できる．つまり，計算して得た $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_k$ について $\boldsymbol{u}_i \cdot \boldsymbol{u}_j$ を計算してみて，もしこれが $\delta_{ij}$ になっていなければ，どこかで計算を間違えていることになる．

4. (1) も $2\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_3 = \mathbf{0}$ であることからわかる．
   $\mathbf{R}^4 = W \oplus W'$ となるような $W'$ として，例えば $W$ の直交補空間 $W^\perp$ がある．4 次元空間 $\mathbf{R}^4$ の中で 2 次元空間 $W$ に直交する方向が $W^\perp$ だから，その次元が $4 - 2 = 2$ であることは直観的には理解しやすいだろう．

配点：10, 15, 15, 10（各小問につき 5 点，50 点満点）

http://math.shinshu-u.ac.jp/~ksakai/18_linear2/18_linear2.html