注意.

- n は 1 以上の整数（自然数）を表すものとする.
- $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ または $\mathbf{C}$ とし，$\mathbf{K}^n$（の部分空間）の和と実数倍は通常のものとする．また $\boldsymbol{e}_1 = {}^t(1, 0, \ldots, 0)$, $\boldsymbol{e}_2 = {}^t(0, 1, 0, \ldots, 0)$ などは $\mathbf{K}^n$ の基本ベクトルを表すものとする.
- 答案にベクトルを書く場合は縦横どちらでもよい.
- 虚数単位は $\sqrt{-1}$ または i のどちらを使ってもよい.（ただし判読できるようにすること）
- 問題 2, 3 については，答案用紙には答のみ記入すること．途中経過が書かれていて誤りを含む場合は減点対象になり得るので注意すること.

問題.

1. (1) V, W を $\mathbf{K}$ ベクトル空間とする．写像 $f\colon V \to W$ が線形であることの定義を述べよ.

   (2) A を複素数を成分に持つ $n \times n$ 行列とする．固有値 $\lambda \in \mathbf{C}$ に属する A の固有空間 $V(\lambda)$ が $\mathbf{C}^n$ の部分ベクトル空間であることを証明せよ.

2. 次の線形写像 f_k $(k = 1, \ldots, 4)$ について，$\dim \operatorname{Ker} f_k$ と $\dim \operatorname{Im} f_k$ を求めよ.（答のみでよい）

   (1) $f_1\colon \mathbf{K}^2 \to \mathbf{K}^2,\quad f_1\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 2x - y \\ -4x + 2y \end{pmatrix}$

   (2) $f_2\colon \mathbf{K}^3 \to \mathbf{K}^3,\quad f_2\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x + 2y + 3z \\ 2x + 3y + 4z \\ x + y + z \end{pmatrix}$

   (3) $f_3\colon \mathbf{K}^4 \to \mathbf{K}^3,\quad f_3\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x + 2y - z + w \\ 2x - y - z + 3w \\ 3x - 4y - z + 5w \end{pmatrix}$

   (4) $f_4\colon \mathbf{K}^n \to \mathbf{K}^n,\quad 1 \leq k \leq n-1$ のとき $f_4(\boldsymbol{e}_k) := \boldsymbol{e}_{k+1}$, また $f_4(\boldsymbol{e}_n) := \mathbf{0}$

3. 次の正方行列 A_k $(k = 1, \ldots, 4)$ について，その固有値を複素数の範囲ですべて求めよ．また $P^{-1}A_kP$ が対角行列になるような複素正則行列 P がある場合はそれを 1 つ求め，ない場合は「P は存在しない」と答えよ.（いずれも答のみでよい）

   (1) $A_1 := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

   (2) $A_2 := \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

   (3) $A_3 := \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

   (4) A_4 は $n \times n$ 行列で，$A_4 = \begin{pmatrix} a_{ij} \end{pmatrix}$ とおくとき $a_{12} = a_{23} = \cdots = a_{n-1\,n} = a_{n1} = 1$, 他の $a_{ij} = 0$. つまり

$$A_4 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

配点：10, 20, 20（各小問 1 つにつき 5 点，50 点満点）

`http://math.shinshu-u.ac.jp/~ksakai/18_linear2/18_linear2.html`