2018 年度 線形代数学 II（生物学コース・物質循環学コース）期末試験 解答例・解説

担当：境 圭一

解答例

1. (1) 各 $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in V$ と $a,b\in\mathbf{K}$ に対し $f(a\boldsymbol{u}+b\boldsymbol{v})=af(\boldsymbol{u})+bf(\boldsymbol{v})$ が成り立つこと．
   (2) $f\colon\mathbf{C}^n\to\mathbf{C}^n$ を $f(\boldsymbol{x})=(\lambda E_n-A)\boldsymbol{x}$ で定義すると f は線形で $V(\lambda)=\operatorname{Ker}f$ だから，$V(\lambda)$ は $\mathbf{C}^n$ の部分ベクトル空間である．

2. $\dim\operatorname{Ker}f_k, \dim\operatorname{Im}f_k$ の順に記す．
   (1) 1, 1
   (2) 1, 2
   (3) 2, 2
   (4) $1, n-1$

3. (1) 固有値は $-1, 3$, また $P=\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}$.
   (2) 固有値は $1\pm\sqrt{-1}$, また $P=\begin{pmatrix}\sqrt{-1}&1\\1&\sqrt{-1}\end{pmatrix}$.
   (3) 固有値は $0, 2$, P は存在しない．
   (4) $z=e^{2\pi\sqrt{-1}/n}=\cos\dfrac{2\pi}{n}+\sqrt{-1}\sin\dfrac{2\pi}{n}$ とおくとき，固有値は z^j $(j=1,\dots,n)$, また $P=\left(z^{ij}\right)_{1\le i,j\le n}$.

解説

1. (1) は和とスカラー倍について別々に述べてあってもよい．(2) の解答例は線形写像の核が部分ベクトル空間であることを使っているが，より素朴に次のようにしてもよい：

$$\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in V(\lambda),\ a,b\in\mathbf{C} \text{ とすると } A(a\boldsymbol{u}+b\boldsymbol{v})=aA\boldsymbol{u}+bA\boldsymbol{v}=a\lambda\boldsymbol{u}+b\lambda\boldsymbol{v}=\lambda(a\boldsymbol{u}+b\boldsymbol{v}) \text{ だから } a\boldsymbol{u}+b\boldsymbol{v}\in V(\lambda).$$

2. $\operatorname{Ker}f_k$ は，（連立）1 次方程式 $f_k(\boldsymbol{u})=\boldsymbol{0}$ の解全体のなす部分ベクトル空間である．$\dim\operatorname{Ker}f_k$ が求まったら，次元定理 $\dim\operatorname{Ker}f_k+\dim\operatorname{Im}f_k=m$（ただし m は f_k の定義域の次元）に代入すれば $\dim\operatorname{Im}f_k$ を求めることができる．(4) については，$\mathbf{K}^n$ の基底の像が与えられているから，$\boldsymbol{x}={}^t(a_1,\dots,a_n)=\sum_{k=1}^n a_k\boldsymbol{e}_k$ に対し $f_4(\boldsymbol{x})=\sum_{k=1}^{n-1}a_k\boldsymbol{e}_{k+1}={}^t(0,a_1,\dots,a_{n-1})$ となるような線形写像 f_4 が定まっており，

$$\operatorname{Ker}f_4=\{{}^t(a_1,\dots,a_n)\in\mathbf{K}^n \mid {}^t(0,a_1,\dots,a_{n-1})=\boldsymbol{0}\}=\{(0,\dots,0,a_n)\in\mathbf{K}^n \mid a_n\in\mathbf{K}\}=\langle\boldsymbol{e}_n\rangle,$$

よって $\dim\operatorname{Ker}f_4=1$ であることがわかる．蛇足だが $\operatorname{Im}f_4=\langle\boldsymbol{e}_2,\dots,\boldsymbol{e}_n\rangle$ になっている．確かめてみるとよい．

3. 固有値は $\phi_A(t)=\det(tE-A)=0$ の解であった．それぞれに属する固有空間の基底をすべて集めたものが $\mathbf{C}^n$ の基底になっていれば A は対角化可能で，P としてはそれらの基底（縦ベクトル）を横に並べて得られるものを取ればよい．基底の取り方は一意でないから，(1), (2), (4) については上の解答例と異なる答もあり得る．A_1 は実対称行列なので，対角化できることだけなら一見してわかる．A_3 の固有空間の基底をすべて並べても $\mathbf{C}^3$ の 2 次元部分空間にしかならないから，A_3 は対角化可能ではない．
   A_4 については $\phi_{A_4}(t)=t^n-1$ である（$\phi_{A_4}(t)$ を第 1 列に関して展開するとよい）．よって固有値は 1 の n 乗根 $z,\dots,z^{n-1},z^n=1$ である．これらは相異なるので A_4 は対角化可能である．$\boldsymbol{x}={}^t(x_1,\dots,x_n)\in V(z^j)$ とすると

$$x_2=z^jx_1,\quad x_3=z^jx_2=z^{2j}x_1,\quad \dots,\quad x_n=z^jx_{n-1}=\cdots=z^{(n-1)j}x_1$$

   を得る．よって $(x_1=z^j$ として$)$ $\boldsymbol{x}_j:={}^t(z^j,z^{2j},\dots,z^{(n-1)j},1)$ とおけば $V(z^j)=\langle\boldsymbol{x}_j\rangle$ である．これらを並べて得られる行列 $P=\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}_1&\boldsymbol{x}_2&\dots&\boldsymbol{x}_n\end{pmatrix}=(z^{ij})_{1\le i,j\le n}$ により，A_4 は

$$P^{-1}A_4P=\operatorname{diag}(z,z^2,\dots,z^{n-1},1)$$

   と対角化される．

配点：10, 20, 20（各小問 1 つにつき 5 点，50 点満点）

http://math.shinshu-u.ac.jp/~ksakai/18_linear2/18_linear2.html