幾何入門 演習問題 1（2019 年 4 月 12 日）

担当：境 圭一

1. $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ に対し，$\boldsymbol{u} \times (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}), \boldsymbol{v} \times (\boldsymbol{w} \times \boldsymbol{u}), \boldsymbol{w} \times (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v})$ を計算せよ．また $(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) \times \boldsymbol{w}$ を計算し，$\boldsymbol{u} \times (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w})$ と一致しないことを確かめよ．
2. （線形代数の教科書を参照せよ）$\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_k \in \mathbb{R}^n$ とする．
   (1) $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_k$ が**一次独立**であることの定義を述べよ．また，$\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_k$ が**一次従属**であることの定義を述べよ．
   (2) $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_k$ が一次独立であるとき，$i = 1, \ldots, k$ に対し $\boldsymbol{u}_i \neq \boldsymbol{0}$ であることを示せ．
3. $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{u}$ などはすべて $\mathbb{R}^3$ のベクトルとする．以下を示せ．
   (1) $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{u} = -\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$, 特に $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$
   (2) $\boldsymbol{u} \times (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}) = (\boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{u})\boldsymbol{v} - (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v})\boldsymbol{w}$ （ヒント：$\boldsymbol{u} = {}^t(u_1, u_2, u_3)$ などとおいて成分計算すれば一応できる）
   (3) $\boldsymbol{u} \times (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}) + \boldsymbol{v} \times (\boldsymbol{w} \times \boldsymbol{u}) + \boldsymbol{w} \times (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0}$ （ヒント：(2) を使う）
   (4) $(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{w} = (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}) \cdot \boldsymbol{u} = (\boldsymbol{w} \times \boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{v}$（ヒント：4/12 の講義の補題 1.4 を使う）
   (5) $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{d}) = (\boldsymbol{b} \times (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{d})) \cdot \boldsymbol{a}$（ヒント：(4) を使う）
   (6) $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{d}) = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{d}) - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{d})(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c})$ （ヒント：(2), (5) を使う）
   (7) $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{v}$ のなす角を θ とするとき，$|\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}| = |\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}| \sin\theta$ （ヒント：(6) を使う）
4. 一次独立な $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ に対し，2×2 行列 $A := \begin{pmatrix} \boldsymbol{u} & \boldsymbol{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix}$ を考える．$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ を二辺とする平行四辺形の面積は $|\det A|$ であることを示せ．$\det A > 0$ になるときと $\det A < 0$ になるときの違いは何か？
5. $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^n$ とする．Cauchy-Schwarz の不等式を使って，次の**三角不等式**を証明せよ：

$$|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{w}| \leq |\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}| + |\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w}|$$

6. $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^3$ がこの順で右手系をなすとは，$\det\begin{pmatrix} \boldsymbol{u} & \boldsymbol{v} & \boldsymbol{w} \end{pmatrix} > 0$ をみたすことである．
   (1) $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3 \in \mathbb{R}^3$ を標準基底とする．$(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ はこの順で右手系だが，$(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_2)$ はそうではないことを示せ．
   (2) $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{v} = -\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{w} = -\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2 + 3\boldsymbol{e}_3$ とする．$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$ はこの順で右手系をなすことを示せ．この $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ を図示し，教科書の図 1.4 と見比べよ．

（提出の必要はありません）

補足． $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n$ と書いたら $\boldsymbol{u}$ は n 個の実数の組で，それ以上の意味は考えなくても数学はできます．しかし何らかの幾何学的な直観がないと，いろいろなことを理解するのは容易ではないと思います．この講義では主に (i) 何らかの始点から伸びる矢印（ある地点における風とか水流などを想定している），(ii) 原点を始点とする矢印の終点，のいずれかであると考えてください．(ii) の場合は点であって，矢印という感じではありません．その時々のベクトルが何を表すか見極めるには，深谷先生の教科書がやっているように，物理的（力学的）な視点が役立ちます．

同じものを表す記号が複数ある，というのはよくあることなので注意してください．この講義では，行列 A の行列式は $\det A$ で，転置行列は ${}^tA$ で，ベクトルの内積は $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}$ で表します．線形代数の講義ではそれぞれ $|A|, A^T, \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle$ などで（あるいは，これら以外で）表したかもしれません．また教科書ではベクトルの長さを $\|\boldsymbol{u}\|$ と表していますが，この講義では $|\boldsymbol{u}|$ と書いています．講義中に現れた記号は断りなく使って構いませんが，他の記号も，それが何を表すかが明確であれば，使っても構いません．ただし，意味が通らない書き方はダメです．**正しい意思疎通のためには，一般的な言い回しを使うべき**です．過去の経験上，内積を " $\boldsymbol{uv}$ " のように書いてしまう人が非常に多いのですが，これは意味が通りません．過去もそうだったのですが，今回もかなりしつこく減点しますから注意してください．

幾何入門 レポート問題 1（2019 年 4 月 12 日）

担当：境 圭一

$\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\in\mathbb{R}^3$ がこの順で右手系をなすとは，$\det\begin{pmatrix}\boldsymbol{u} & \boldsymbol{v} & \boldsymbol{w}\end{pmatrix}>0$ をみたすことである．$\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^3$ が一次独立であるとき，$\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}$ はこの順で右手系をなすことを示せ．（ヒント：4/12 の講義の補題 1.4, 演習の問題 2, 3 を使う）

（4/19 の 3 限開始時までに提出してください）

http://math.shinshu-u.ac.jp/~ksakai/19_geometry/19_geometry.html

幾何入門 レポート問題 1（2019 年 4 月 12 日）

担当：境 圭一

$\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\in\mathbb{R}^3$ がこの順で右手系をなすとは，$\det\begin{pmatrix}\boldsymbol{u} & \boldsymbol{v} & \boldsymbol{w}\end{pmatrix}>0$ をみたすことである．$\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^3$ が一次独立であるとき，$\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}$ はこの順で右手系をなすことを示せ．（ヒント：4/12 の講義の補題 1.4, 演習の問題 2, 3 を使う）

（4/19 の 3 限開始時までに提出してください）

http://math.shinshu-u.ac.jp/~ksakai/19_geometry/19_geometry.html

幾何入門 レポート問題 1（2019 年 4 月 12 日）

担当：境 圭一

$\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\in\mathbb{R}^3$ がこの順で右手系をなすとは，$\det\begin{pmatrix}\boldsymbol{u} & \boldsymbol{v} & \boldsymbol{w}\end{pmatrix}>0$ をみたすことである．$\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^3$ が一次独立であるとき，$\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}$ はこの順で右手系をなすことを示せ．（ヒント：4/12 の講義の補題 1.4, 演習の問題 2, 3 を使う）

（4/19 の 3 限開始時までに提出してください）

http://math.shinshu-u.ac.jp/~ksakai/19_geometry/19_geometry.html

幾何入門 レポート問題 1（2019 年 4 月 12 日）

担当：境 圭一

$\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\in\mathbb{R}^3$ がこの順で右手系をなすとは，$\det\begin{pmatrix}\boldsymbol{u} & \boldsymbol{v} & \boldsymbol{w}\end{pmatrix}>0$ をみたすことである．$\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^3$ が一次独立であるとき，$\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}$ はこの順で右手系をなすことを示せ．（ヒント：4/12 の講義の補題 1.4, 演習の問題 2, 3 を使う）

（4/19 の 3 限開始時までに提出してください）

http://math.shinshu-u.ac.jp/~ksakai/19_geometry/19_geometry.html

幾何入門 レポート問題 1（2019 年 4 月 12 日）

担当：境 圭一

$\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\in\mathbb{R}^3$ がこの順で右手系をなすとは，$\det\begin{pmatrix}\boldsymbol{u} & \boldsymbol{v} & \boldsymbol{w}\end{pmatrix}>0$ をみたすことである．$\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^3$ が一次独立であるとき，$\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}$ はこの順で右手系をなすことを示せ．（ヒント：4/12 の講義の補題 1.4, 演習の問題 2, 3 を使う）

（4/19 の 3 限開始時までに提出してください）

http://math.shinshu-u.ac.jp/~ksakai/19_geometry/19_geometry.html