幾何入門 演習問題 2（2019 年 4 月 19 日）

担当：境 圭一

特に断らなければ $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ とする．$\boldsymbol{0}$ は $\mathbb{R}^2$ の原点（ゼロベクトル）である．

1. 次のベクトル場を図示せよ．ただし (3), (4) では原点での値は考えない．
   (1) $\boldsymbol{W}(\boldsymbol{u}) := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (2) $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{u}) := \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$ (3) $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{u}) := \dfrac{1}{|\boldsymbol{u}|^2}\begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$ (4) $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{u}) := -\dfrac{1}{|\boldsymbol{u}|^3}\boldsymbol{u}$
   ((3), (4) のヒント：原点近くでの $|\boldsymbol{T}(\boldsymbol{u})|, |\boldsymbol{G}(\boldsymbol{u})|$ の値は？原点から遠いところでは？)
2. $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を $f(\boldsymbol{u}) = xy$ で定義する．
   (1) $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ $(r \geq 0, 0 \leq \theta < 2\pi)$ とおき，f を r, θ を使って表せ．（r, θ を**極座標**とよぶ）
   (2) (1) の結果を $g(r, \theta)$ とおく．θ を 1 つ固定する．$z = g(r, \theta)$ のグラフを rz 平面に描け．（θ で場合分けせよ）
   (3) (2) で描いたグラフを全ての θ について考えることにより，$z = f(\boldsymbol{u})$ のグラフを完成させよ．
   (4) $\mathrm{grad}(f)$ を図示せよ．また $\mathrm{grad}(f)(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{0}$ となる $\boldsymbol{u}$ を求めよ．
3. 次の $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ について，そのグラフを描け．また $\mathrm{grad}(f)$ を図示し，$\mathrm{grad}(f)(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{0}$ となる $\boldsymbol{u}$ を全て求めよ．
   (1) $f(\boldsymbol{u}) = x^2 - y^2$ (2) $f(\boldsymbol{u}) = \dfrac{1}{|\boldsymbol{u}|^2}$（ただし $\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{0}$ とする） (3) $f(\boldsymbol{u}) = x^3 + x^2 + xy$ (4) $f(\boldsymbol{u}) = x^2 y$
   (3), (4) のヒント：定数 k に対し，平面 $y = k$ で切った切り口を考える．k で場合分けせよ．
4. $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を，$f(\boldsymbol{u}) := \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}$ $(\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{0})$, $f(\boldsymbol{0}) := 0$ と定義する．
   (1) f は $\boldsymbol{0}$ において連続であることを示せ．（ヒント：極座標を使う）
   (2) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(\boldsymbol{0}), \dfrac{\partial f}{\partial y}(\boldsymbol{0})$ が存在することを示し，その値を求めよ．$\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}$ は $\boldsymbol{0}$ において連続か？
   (3) $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, |\boldsymbol{v}| = 1$ とする．点 $\boldsymbol{u}_0 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ における f の $\boldsymbol{v}$ 方向の方向微分を定義通り計算せよ．
   (4) (3) の方向微分の値が最小になるときの $\boldsymbol{v}$ を求めよ．
   (5) $\mathrm{grad}(f)(\boldsymbol{u}_0)$ を計算し (4) と比較せよ．
5. C^∞ 級関数 $f, g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ と定数 $a, b \in \mathbb{R}$ に対し，$af + bg, fg, h \circ f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ を

$$(af+bg)(\boldsymbol{u}) := af(\boldsymbol{u}) + bg(\boldsymbol{u}), \quad (fg)(\boldsymbol{u}) := f(\boldsymbol{u})g(\boldsymbol{u}), \quad (h \circ f)(\boldsymbol{u}) := h(f(\boldsymbol{u}))$$

   で定める．次のことを示せ：

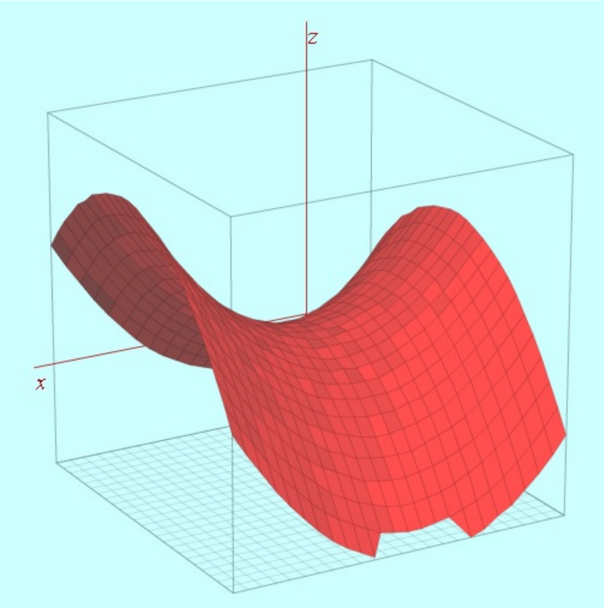
$$\mathrm{grad}(af+bg) = a\,\mathrm{grad}(f) + b\,\mathrm{grad}(g), \qquad \mathrm{grad}(fg) = g\,\mathrm{grad}(f) + f\,\mathrm{grad}(g), \quad \mathrm{grad}(h \circ f) = (h' \circ f)\mathrm{grad}(f)$$

（提出の必要はありません）

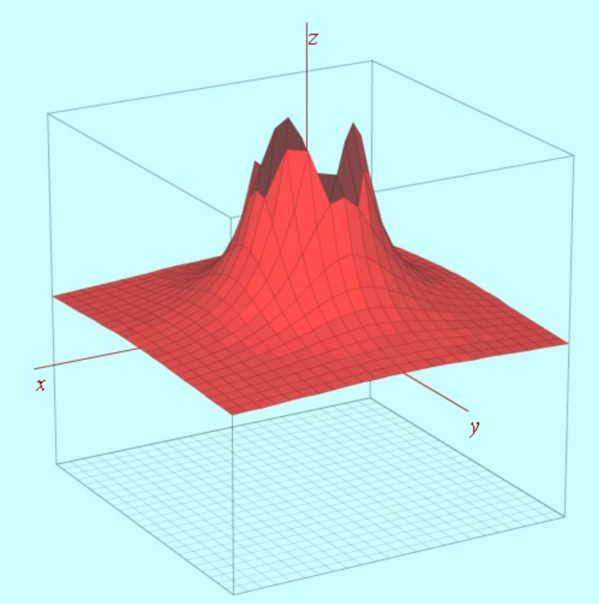
補足．「場」というのは物理の用語で，考えている空間内の各点において何らかの値が定まるような対応のことを言います．数学的には「関数」または「写像」と同義です．例えば地球上の点 $\boldsymbol{u}$ における風の強さ $\boldsymbol{W}(\boldsymbol{u})$ や重力 $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{u})$ などは，各点 $\boldsymbol{u}$ において向きと大きさを持つ値，すなわちベクトルが定まるような対応なので「ベクトル場」と呼びます．これらの例から，$\boldsymbol{V}$ をベクトル場とするとき，（気持ちとしては）ベクトル $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{u})$ の始点は $\boldsymbol{u}$ だと考えておくとよいことがわかります（そんなことは定義のどこにも書かれていないが）．別の例として，点 $\boldsymbol{u}$ における気温 $T(\boldsymbol{u})$ は，各点においてスカラー（実数）が定まるような対応なので「スカラー場」と呼びます．数学ではスカラー場のことを通常は関数と呼びます．ベクトル場のことはベクトル値関数と呼んだりもします．
問題 5 で示すべき式は，$n = 1$ のときは高校でもやったような微分の線形性，積の微分公式，合成関数の微分公式に他ならず，同様のことが勾配ベクトル場についても拡張されることを見る問題です．一般に，関数 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ とベクトル場 $\boldsymbol{V}, \boldsymbol{W}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ に対し，ベクトル場 $\boldsymbol{V} + \boldsymbol{W}, f\boldsymbol{V}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ が，それぞれ $(\boldsymbol{V}+\boldsymbol{W})(\boldsymbol{u}) := \boldsymbol{V}(\boldsymbol{u}) + \boldsymbol{W}(\boldsymbol{u})$, $(f\boldsymbol{V})(\boldsymbol{u}) := f(\boldsymbol{u})\boldsymbol{V}(\boldsymbol{u})$ で定義されます．各点 $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n$ ごとにベクトルの和やスカラー倍を考えているわけで，$f\boldsymbol{V}$ のほうは，スカラー倍のほうも点ごとに変化しているわけです．問題 5 で示すべき式の右辺の勾配ベクトル場の和や関数倍は，このような意味です．

http://math.shinshu-u.ac.jp/~ksakai/19_geometry/19_geometry.html

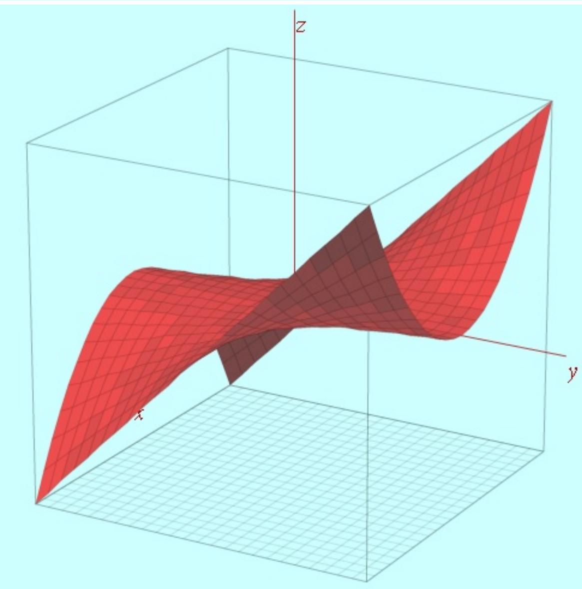
演習問題 **2-3** の関数のグラフ



$z = x^2 - y^2$ のグラフ．z 軸に直交する平面 $z = k$ で切ると，$k \neq 0$ のとき双曲線 $x^2 - y^2 = k$ が現れる．この双曲線は，$k > 0$ のとき x 軸と $(\pm\sqrt{k}, 0)$ で交わり，$k < 0$ のとき y 軸と $(0, \pm\sqrt{-k})$ で交わる．これらは共に $k \to 0$ の極限で，原点で交わる 2 直線 $y = \pm x$（双曲線の漸近線）に「退化」する．



$z = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$ のグラフ．$x = y = 0$ で発散している．
$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ とおくと $z = \dfrac{1}{r^2}$. 偏角 θ の rz 平面で切った切り口は $z = \dfrac{1}{r^2}$ のグラフ．
また，z 軸に垂直な平面 $z = k$ での切り口は，$k \leq 0$ のとき $\emptyset$, $k > 0$ のときは原点を中心とし半径 $\sqrt{k^{-1}}$ の円である．xy 平面に近いほど半径は大きく，上に行くほど小さくなる．



$z = x^2 y$ のグラフ．y 軸に垂直な平面 $y = k$ で切った切り口は，$k > 0$ のとき「下に凸」な放物線，$k = 0$ のとき直線 $z = 0$, $k < 0$ のとき「上に凸」な放物線である．
また，x 軸に垂直な平面 $x = k$ で切った切り口は，直線 $z = k^2 y$ である，この直線の傾き k^2 は 0 以上で，原点から離れるほど大きくなる．

参考：2 変数関数グラフ Yokatoki Flash 版，
`http://www1.kiy.jp/~yoka/GraphYokatoki/GraphYokatoki2_FLASH.html`

幾何入門 レポート問題 2（2019 年 4 月 19 日）

担当：境 圭一

各自の学籍番号の下 2 桁を n とする．例えば 18S1000α なら $n = 0$, 18S1089β なら $n = 89$.
$a = n + 1$, $b = 60 - n$ とし，$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を，$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ に対し $f(\boldsymbol{u}) := (ax^2 + by^2)e^{-x^2-y^2}$ で定義する．$\mathrm{grad}(f)(\boldsymbol{u}) = \mathbf{0}$ となる $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^2$ をすべて求めよ．

（4/26 の 3 限開始時までに提出してください）

http://math.shinshu-u.ac.jp/~ksakai/19_geometry/19_geometry.html