幾何入門 レポート 2（2019 年 4 月 19 日）コメント

担当：境 圭一

$\mathrm{grad}(f)(\boldsymbol{u}) = 2e^{-x^2-y^2}\begin{pmatrix} ax - x(ax^2+by^2) \\ by - y(ax^2+by^2) \end{pmatrix}$ なので，$\mathrm{grad}(f)(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{0}$ は

$$x(ax^2+by^2-a) = 0 \quad \text{かつ} \quad y(ax^2+by^2-b) = 0 \tag{$*$}$$

と同値です．第 1 の式から $x = 0$ または $ax^2+by^2 = a$ を得ますから，それぞれの場合に第 2 の式に代入すれば

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}, \quad \pm\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \quad \pm\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

を得ます．答は n の値に関係しません．計算途中で $a \neq b$ であることを使いますが，これは a, b の設定の仕方と n が整数であることから従うことで，n の値は問題にはなりません．

場合分けを正確にできていない答案がたくさんあります．危機感を持ってください．$\dfrac{\partial f}{\partial x}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{0}$ から $x = 0$ または $ax^2+by^2 = a$, また $\dfrac{\partial f}{\partial y}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{0}$ から $y = 0$ または $ax^2+by^2 = b$ がそれぞれ得られますから，可能性としては

(i) $x = 0$ かつ $y = 0$
(ii) $x = 0$ かつ $ax^2+by^2 = b$
(iii) $ax^2+by^2 = a$ かつ $y = 0$
(iv) $ax^2+by^2 = a$ かつ $ax^2+by^2 = b$

があります．(iv) を落としている答案がたくさんありました．もちろん $a \neq b$ なので (iv) をみたす (x, y) はありませんが，そのことが分かったうえで落としているのではないように読めました．このように $\dfrac{\partial f}{\partial x}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{0}$ と $\dfrac{\partial f}{\partial y}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{0}$ を対等に扱う場合分けよりは，上に書いたように $\dfrac{\partial f}{\partial x}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{0}$ 側で場合分けしたほうが混乱がないと思います．

答案の書き方として，

（あまりよくない）　$\mathrm{grad}(f)(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{0}$ より $(*)$ である

という答案は，意地悪な読み方をすれば，「（何らかの理由で）必ず $\mathrm{grad}(f) = \boldsymbol{0}$ であり，従って $\boldsymbol{u}$ としては $(*)$ をみたすものしか考えることはできない」と主張しているように読めなくもありません．実際はそうではなく，任意の $\boldsymbol{u}$ に対し $\mathrm{grad}(f)(\boldsymbol{u})$ というベクトルが定まるが，その中で $\mathrm{grad}(f)(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{0}$ をみたす $\boldsymbol{u}$ はこれである，と主張したいわけですから，例えば $\mathrm{grad}(f)$ を具体的に求めた上で

（よい）　$\mathrm{grad}(f)(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{0}$ となるための必要十分条件は $(*)$ である．

と書けば間違いないと思います．

次頁の図 1 は $a = 1, b = 2$ の場合の $z = f(x, y)$ のグラフの概形です．黒丸で囲ったあたりが $\pm(1, 0), \pm(0, 1)$ 上の点で，真ん中の落ち込んでいるあたりが $\boldsymbol{0}$ 上の点です．少しわかりにくいのですが，$\boldsymbol{0}$ 上では極小点に，$\pm(0, 1)$ 上では極大点に，$\pm(1, 0)$ 上では鞍点に（つまり，$z = xy$ のグラフの $\boldsymbol{0}$ 付近と同様の形に）なっていることが見て取れます．これらの点ではグラフはどの方向にも勾配しておらず，これらの点に（慎重に）ボールを置けば，ボールは転がらず静止します．

参考：2 変数関数グラフ Yokatoki Flash 版，
http://www1.kiy.jp/~yoka/GraphYokatoki/GraphYokatoki2_FLASH.html

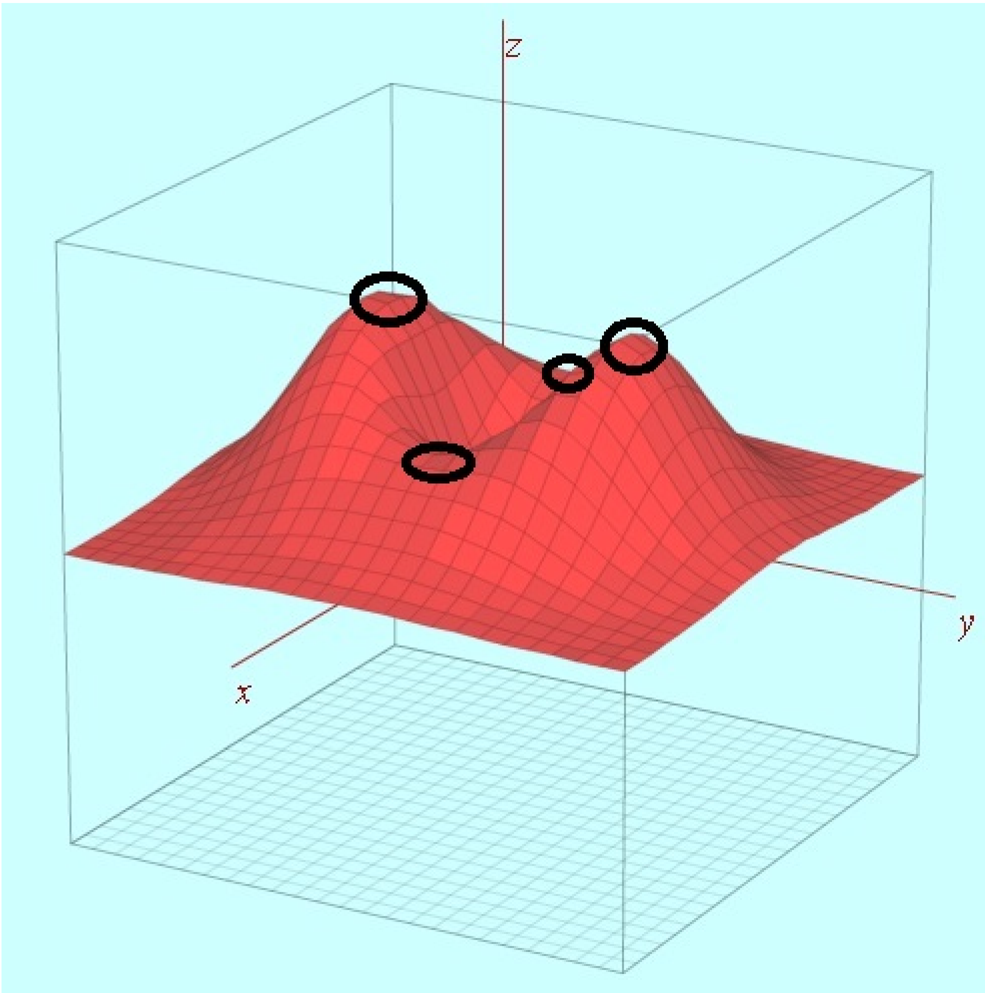

図 1　$z = f(x, y)$ のグラフ