幾何入門 演習問題 3（2019 年 4 月 26 日）

担当：境 圭一

特に断らなければ $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とし，また写像はすべて C^∞ 級とする．

1. (1) $k > 1$ を定数とし，$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を $f(\boldsymbol{u}) := x^2 + 2xy + ky^2$ で定める．$L := f^{-1}(1)$ は $\emptyset$ でないことを示せ．また L は正則曲線であることを示せ．

   (2) $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を $g(\boldsymbol{u}) := (|\boldsymbol{u}|^2 - 1)^2$ で定める．$L := g^{-1}(0)$ は $\emptyset$ でないこと，すべての $\boldsymbol{u} \in L$ に対し $\mathrm{grad}(g)(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{0}$ であることを示せ．L は正則曲線か？

2. $\boldsymbol{l}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ を曲線のパラメータ，$h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を 1 変数関数とし，$t = h(s)$ とする．$(\boldsymbol{l} \circ h)(s) := \boldsymbol{l}(h(s))$ で定まる曲線のパラメータ $\boldsymbol{l} \circ h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ について，$\dfrac{d(\boldsymbol{l} \circ h)}{ds} = h' \cdot \left(\dfrac{d\boldsymbol{l}}{dt} \circ h\right)$ であることを示せ．（右辺はベクトルのスカラー倍）

3. (1) $\boldsymbol{l}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ を $\boldsymbol{l}(t) := \begin{pmatrix} t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}$ で定義する．$\boldsymbol{l}$ が表す曲線 L を図示せよ．任意の C^∞ 級関数 $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ で，$h(s_0) = 0$ となる s_0 が存在するものに対し，$\dfrac{d(\boldsymbol{l} \circ h)}{ds}(s_0) = \boldsymbol{0}$ であることを示せ．

   (2) $\boldsymbol{l}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ を曲線の正則パラメータ（任意の $t \in \mathbb{R}$ に対し $\dfrac{d\boldsymbol{l}}{dt}(t) \neq \boldsymbol{0}$ である）とし，$L := \boldsymbol{l}(\mathbb{R})$ とする．$h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $h(s) := s^3$ で定め，$\boldsymbol{m}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ を $\boldsymbol{m} := \boldsymbol{l} \circ h$ で定義するとき，$\boldsymbol{m}(\mathbb{R}) = L$ であることを示せ．$\boldsymbol{m}$ は正則か？

4. $L \subset \mathbb{R}^n$ を正則曲線とし，$\boldsymbol{l}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ を L を表す正則パラメータ，$\boldsymbol{u}_0 := \boldsymbol{l}(t_0) \in L$ とする．$h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は $h(s_0) = t_0$, $h'(s_0) \neq 0$ をみたす関数であるとし，$\boldsymbol{m} := \boldsymbol{l} \circ h$ とおく．$\boldsymbol{m}$ は $s = s_0$ において正則なパラメータであることを示せ．また $\boldsymbol{l}$ と $\boldsymbol{m}$ は，$\boldsymbol{u}_0 = \boldsymbol{l}(t_0) = \boldsymbol{m}(s_0) \in L$ において同じ接線を定めることを示せ．

5. $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ とし，$k \in \mathbb{R}$ を定数とする．$\boldsymbol{l}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ が，すべての $t \in \mathbb{R}$ に対し $f(\boldsymbol{l}(t)) = k$ をみたす（つまり，$\boldsymbol{l}$ は $f^{-1}(k)$ の一部を表すパラメータである）とするとき，すべての $t \in \mathbb{R}$ に対し $\dfrac{d\boldsymbol{l}}{dt}(t) \cdot \mathrm{grad}(f)(\boldsymbol{l}(t)) = 0$ が成り立つことを示せ．（ヒント：$\boldsymbol{l} = (l_1, l_2)$ とおき，$f(\boldsymbol{l}(t)) = k$ の両辺を t で微分せよ）

（提出の必要はありません）

補足.

(i) 関数 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ と $k \in \mathbb{R}$ について，講義では $f^{-1}(k) := \{\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n \mid f(\boldsymbol{u}) = k\}$ とおきました．“$f^{-1}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$” という写像があるわけではなく，$f^{-1}(k)$ 全体で 1 つの記号であることに注意してください．

(ii) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ と $k \in \mathbb{R}$ について，$f^{-1}(k) \subset \mathbb{R}^2$ が $\emptyset$ でないとき，これが正則曲線であるための十分条件の 1 つとして「すべての $\boldsymbol{u} \in f^{-1}(k)$ において $\mathrm{grad}(f)(\boldsymbol{u}) \neq \boldsymbol{0}$ である」$\cdots(*)$ が挙げられることを講義で見ました．問題 1 (1) は，任意の $\boldsymbol{u} \in f^{-1}(1)$ に対し $\mathrm{grad}(f)(\boldsymbol{u}) \neq \boldsymbol{0}$ であることを示せばよいわけですが，もし $f^{-1}(1) = \emptyset$ であれば，そもそも「$\boldsymbol{u} \in f^{-1}(1)$ を取る」こと自体に意味がないので，まず $f^{-1}(1) \neq \emptyset$ から示すべきでしょう．
また条件 $(*)$ は必要条件ではないことに注意が必要です．問題 1 (2) がそのことを示す例です．

(iii) 問題 3 は，曲線 L が正則か否かは L そのものの性質であって，パラメータには関係しない，ということを意味します．(1) の L が $\boldsymbol{0} \in L$ において正則でないのは L の性質であって，$\boldsymbol{l}(t) = (t^2, t^3)$ と取ったからではありません．また L を表す正則なパラメータが **1 つ**存在すれば L は正則で，それ以外のパラメータがどうであるかは無関係です．(2) のように，正則な曲線 L を正則でないパラメータで表すことも可能です．

(iv) 問題 4 は，曲線の接線は曲線そのものにより決定されることを意味します．具体的に接線を求めるにはパラメータを必要としますが，どのようにパラメータを取ろうとも，結果的には同じ接線が求まります．

(v) $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ に対し，$f^{-1}(k)$ 上では f は一定値 k を取ります．一方，勾配ベクトル場 $\mathrm{grad}(f)$ は，f の方向微分の値が最大・最小になる方向（関数の値の変化が最も激しい方向）であることを 4/19 の講義で見ました．f の値の変化率という観点からは，$f^{-1}(k)$ と $\mathrm{grad}(f)$ は「正反対」の性質を持った方向を表すことになります．問題 5 は，実際これらは直交していることを $n = 2$ の場合に示しています．問題 5 で示すべき式は，$\boldsymbol{l}(t) \in f^{-1}(k)$ における接線の方向 $\dfrac{d\boldsymbol{l}}{dt}(t)$ が $\mathrm{grad}(f)(\boldsymbol{l}(t))$ と直交していることを意味します．同様のことは一般の n について言えます．

逆関数定理，陰関数定理について

これらについては講義では証明を割愛しましたが，例えば「解析入門 II」（杉浦光夫，東大出版会）第 VI 章に詳しい解説があります．ぜひ勉強してみてください．ここでは気分だけ説明します．

定義． $\boldsymbol{F}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ を C^1 級写像とし，$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = (F_1(\boldsymbol{x}), \dots, F_n(\boldsymbol{x}))$ と表すとき，

$$(D\boldsymbol{F})(\boldsymbol{x}) := \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{x})\right)_{1\le i,j\le n}$$

を，$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ における $\boldsymbol{F}$ のヤコビ行列 (Jacobian) とよぶ．

逆関数定理は，一般には次のように定式化されます．

逆写像定理． $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ を C^r 級写像 $(r \ge 1)$ とし，$\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ において $\det(D\boldsymbol{F})(\boldsymbol{a}) \neq 0$ と仮定する．このとき，$\boldsymbol{a} \in U$, $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{a}) \in V$ をみたす $\mathbb{R}^n$ の開集合が存在し，$\boldsymbol{F}|_U\colon U \to V$ は全単射で，逆写像 $\boldsymbol{F}^{-1}\colon V \to U$ は C^r 級である．
（※「開集合」については今後の講義で触れます）

講義で使ったのは $n = 1$ のときで，このときは特に逆関数定理と呼びます．
簡単のため $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}$ の場合を考えましょう．微分積分学で学んだように，各 F_i は $\boldsymbol{0}$ の近くで

$$F_i(\boldsymbol{x}) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{0})x_j + (2\text{ 次以上の項 })$$

と Maclaurin 展開されます．これらを並べると，$\boldsymbol{F}$ は $\boldsymbol{0}$ の近くで

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = (D\boldsymbol{F})(\boldsymbol{0})\boldsymbol{x} + (2\text{ 次以上の項 }) \tag{$*$}$$

と表されることがわかります（確かめてみてください）．ただし $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$ とも縦ベクトルとみなしています．$\boldsymbol{0}$ の近くでは 2 次以上の項は小さく，$(*)$ の右辺は 1 次の項が支配的です．1 次の項はヤコビ行列 $(D\boldsymbol{F})(\boldsymbol{0})$ で表される線形写像ですから，これは $\det(D\boldsymbol{F})(\boldsymbol{0}) \neq 0$ のとき逆写像 $(D\boldsymbol{F})(\boldsymbol{0})^{-1}$ を持ちます．以上を合わせると，$\det(D\boldsymbol{F})(\boldsymbol{0}) \neq 0$ のとき，$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}$ の近くでは「近似的に」$\boldsymbol{F}^{-1}$ が存在すると言えそうです．
以上の議論は，もちろん証明でもなんでもありませんが，逆写像定理が成り立つ理由として本質的な部分です．

講義で使った陰関数定理は，おおむね次のようなものでした．

陰関数定理 (2 次元)． $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を C^r 級関数とし，$\boldsymbol{u}_0 = (x_0, y_0) \in f^{-1}(0)$ において $\dfrac{\partial f}{\partial y}(\boldsymbol{u}_0) \neq 0$ と仮定する．このとき，x_0 を含む開区間 $I \subset \mathbb{R}$ と，C^r 級関数 $g\colon I \to \mathbb{R}$ が存在し，$g(x_0) = y_0$ と，$x \in I$ のとき $f(x, g(x)) = 0$ が成り立つ．

$\dfrac{\partial f}{\partial y}(\boldsymbol{u}_0) \neq 0$ であるような $\boldsymbol{u}_0 \in f^{-1}(0)$ の近くでは，$f(x, y) = 0$ で表される x, y の関係式は $y = g(x)$ の形に「解ける」ということを主張する定理です．g は $f(x, y) = 0$ によって「陰に」定められる関数なので，g のことを陰関数とよびます．
$\boldsymbol{F}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を $\boldsymbol{F}(x, y) := (x, f(x, y))$ で定義すると，$\dfrac{\partial f}{\partial y}(\boldsymbol{u}_0) \neq 0$ の仮定から，$\boldsymbol{F}$ に対しては $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{u}_0$ において逆写像定理を使えることがわかります．この逆写像を $\boldsymbol{G} = (G_1, G_2)$ とおくとき，$g(x) := G_2(x, 0)$ が条件をみたす関数になります（確かめてみてください）．
陰関数定理は，より一般の $\boldsymbol{F}\colon \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^n$ について定式化されます．詳しくは上に挙げた参考書などをご覧ください．

幾何入門 レポート問題 3（2019 年 4 月 26 日）

担当：境 圭一

各自の学籍番号の下 2 桁を a とする．例えば 19S1067α なら $a = 67$, 19S1089β なら $a = 89$.
関数 $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を $f(x, y) := (1 + \cos a)x^2 - 2(\sin a)xy + (2 - \cos a)y^2$ で定義する．$L := f^{-1}(1)$ は $\emptyset$ でないかどうか，$\emptyset$ でない場合は正則曲線かどうか答えよ．（ヒント：$\cos a$ や $\sin a$ の具体的な値に惑わされないこと）

（5/10 の 3 限開始時までに提出してください）

http://math.shinshu-u.ac.jp/~ksakai/19_geometry/19_geometry.html