幾何入門 レポート 3（2019 年 4 月 26 日）コメント

担当：境 圭一

a に関わらず $2-\cos a>0$ です．$f\Big(0,\dfrac{1}{\sqrt{2-\cos a}}\Big)=1$ ですから $\Big(0,\dfrac{1}{\sqrt{2-\cos a}}\Big)\in L$ ということになり，従って $L\neq\emptyset$ です．

$\boldsymbol{u}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ において $\mathrm{grad}(f)(\boldsymbol{u})=2\begin{pmatrix}(1+\cos a)x-(\sin a)y\\-(\sin a)x+(2-\cos a)y\end{pmatrix}$ ですから，$\mathrm{grad}(f)(\boldsymbol{u})=\boldsymbol{0}$ とすると

$$\begin{pmatrix}1+\cos a & -\sin a\\ -\sin a & 2-\cos a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\boldsymbol{0}$$

です．左辺の係数行列の行列式は $1+\cos a$ で，a が自然数ならこれは 0 ではありませんから，上の式をみたす $\boldsymbol{u}$ は $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{0}$ しかないことになります．一方で $f(\boldsymbol{0})=0\neq1$ ですから $\boldsymbol{0}\notin L$ です．従って L 上 $\mathrm{grad}(f)\neq\boldsymbol{0}$ ですから，講義でやったことにより L は正則な曲線であることがわかります．実際には L は楕円になっています．

$\mathrm{grad}(f)(\boldsymbol{u})=\boldsymbol{0}$ をみたすのが $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{0}$ だけであるのは決して明らかではないでしょう．レポート問題 2 でやってもらったように，このような $\boldsymbol{u}$ が複数，時に無限個あることもあり得ます．上で述べた係数行列の行列式が 0 であれば，解は無限個になります．

また

（よくない）$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{0}$ のとき $\mathrm{grad}(f)(\boldsymbol{u})=\boldsymbol{0}$ だが $f(\boldsymbol{0})=1\neq0$ だから $\boldsymbol{0}\notin L$. よって L は正則

のような答案は適当ではありません．これだと $\boldsymbol{0}$ 以外の $\boldsymbol{u}$ については何も言っていないことになります．また「よって」のところは話が飛躍しています．

（よい）$\mathrm{grad}(f)(\boldsymbol{u})=\boldsymbol{0}$ となる $\boldsymbol{u}$ は $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{0}$ に限るが，一方 $f(\boldsymbol{0})=1\neq1$ だから $\boldsymbol{0}\notin L$. よって L 上で $\mathrm{grad}(f)\neq\boldsymbol{0}$ だから L は正則

と書けば論理的に正しく，また根拠もはっきりします．

$L\neq\emptyset$ を示すために $f\Big(0,\dfrac{1}{\sqrt{2-\cos a}}\Big)=1$ を使うとして，“$2-\cos a\neq0$”も大事ですが（分母に来るから），それより強く“$2-\cos a>0$”であることが必要です（平方根の中に入るから）．

その他，変だと思った文章を列挙します．

- 「$f^{-1}(1)$ のとき $f(x,y)=1$ だから」
  → 「$(x,y\in)f^{-1}(1)$ のとき $f(x,y)=1$ だから」ならわかる．$f^{-1}(1)$ というのは $\mathbb{R}^2$ の部分集合で，条件とか状況とかではないから，「$f^{-1}(1)$ のとき」というのはおかしい．
- 「L が $\boldsymbol{0}$ でないことを示す」
  → 「L が $\emptyset$ でないことを示す」が正しい．空集合を表す $\emptyset$ はゼロに斜線を重ねた記号で，ゼロベクトル $\boldsymbol{0}$ は 0 の太文字．そもそも L は $\mathbb{R}^2$ の部分集合で，$\boldsymbol{0}$ は $\mathbb{R}^2$ のベクトルだから，両者が等しいかどうか論じることには（あまり）意味がない．
- 「$f(x,y)=1$ をみたすような $\mathrm{grad}(f)(x,y)\neq\boldsymbol{0}$」
  → 「$f(x,y)=1$ をみたすような (x,y) に対し $\mathrm{grad}(f)(x,y)\neq\boldsymbol{0}$」ならわかる．「$L$ 上 $\mathrm{grad}(f)\neq\boldsymbol{0}$」ということを言いたいと思われるが，そうは読めない．意味が通る文章かどうか考えず人の答案を丸写ししていても得るものはない．