幾何入門 演習問題 4（2019 年 5 月 10 日）

担当：境 圭一

問題 2, 3 では $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ とする．

1. 次のパラメータ $\boldsymbol{l}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ が定める曲線 $L := \boldsymbol{l}(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^2$ を図示せよ．
   (1) $\boldsymbol{l}(t) := \begin{pmatrix} a\cos t \\ b\sin t \end{pmatrix}$ （a, b は定数，$0 < a \leq b$） (2) $\boldsymbol{l}(t) := \begin{pmatrix} 1-t^2 \\ t \end{pmatrix}$ (3) $\boldsymbol{l}(t) := \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} e^t - e^{-t} \\ e^t + e^{-t} \end{pmatrix}$
   (4) $\boldsymbol{l}(t) := \begin{pmatrix} t^2 \\ t^3 - t \end{pmatrix}$（ヒント：$x = t^2, y = t^3 - t$ の増減を考えよ）

2. (1) ベクトル場 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{u}) := \dfrac{1}{ab}\begin{pmatrix} -y \\ 2x \end{pmatrix}$ と前問 (1) の $\boldsymbol{l}$ に対し，線積分 $\displaystyle\int_{\boldsymbol{l}} \boldsymbol{V}\cdot d\boldsymbol{l}$ を計算せよ．
   (2) ベクトル場 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{u}) := \begin{pmatrix} -y \\ 1-x \end{pmatrix}$ と前問 (2) の $\boldsymbol{l}$（ただし $-1 \leq t \leq 1$ とする）に対し，線積分 $\displaystyle\int_{\boldsymbol{l}} \boldsymbol{V}\cdot d\boldsymbol{l}$ を計算せよ．

3. (1) $\boldsymbol{l}\colon \left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right] \to \mathbb{R}^2, \boldsymbol{l}(t) := \begin{pmatrix} t \\ \sqrt{1-t^2} \end{pmatrix}$ が定める曲線 L を図示せよ．$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{u}) := \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$ に対し，$\displaystyle\int_{\boldsymbol{l}} \boldsymbol{V}\cdot d\boldsymbol{l}$ を計算せよ．
   (2) $h\colon \left[\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{2\pi}{3}\right] \to \left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right], h(t) := -\cos t$ は $h' > 0$ をみたすことを示せ．$\widetilde{\boldsymbol{l}} := \boldsymbol{l} \circ h$ とおき，$\displaystyle\int_{\widetilde{\boldsymbol{l}}} \boldsymbol{V}\cdot d\widetilde{\boldsymbol{l}}$ を計算し (1) と比較せよ．$\hat{h}(t) := \cos t$ の場合はどうか？

4. (1) $\boldsymbol{l}, \boldsymbol{m}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ はともに正則曲線 L の正則パラメータである（速度ベクトルが $\boldsymbol{0}$ にならない）とし，変数変換 h により $\boldsymbol{m} = \boldsymbol{l} \circ h$ が成り立っているとする．任意の $s \in \mathbb{R}^1$ に対し $h'(s) \neq 0$ であることを示せ．
   (2) (1) のような $\boldsymbol{l}, \boldsymbol{m}$ が同じ向きを表すとき，$\boldsymbol{l} \approx \boldsymbol{m}$ と書くことにする．$\approx$ は L の正則パラメータの集合上に**同値関係**を定めることを示せ．すなわち，以下のことを示せ：
   (i) $\boldsymbol{l} \approx \boldsymbol{l}$ (ii) $\boldsymbol{l} \approx \boldsymbol{m}$ ならば $\boldsymbol{m} \approx \boldsymbol{l}$ (iii) $\boldsymbol{l} \approx \boldsymbol{m}$ かつ $\boldsymbol{m} \approx \boldsymbol{n}$ ならば $\boldsymbol{l} \approx \boldsymbol{n}$

5. 人工衛星を打ち上げるには（重力に対して）仕事が必要だが，周回軌道に乗った後は仕事は必要でない．このことを次のようなモデルで検証しよう．$\mathbb{R}^3 - \{\boldsymbol{0}\} := \{\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^3 \mid \boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{0}\}$ とする．
   (1) 地球の重力のモデルとして，$\mathbb{R}^3 - \{\boldsymbol{0}\}$ 上のベクトル場 $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{u}) := -\dfrac{1}{|\boldsymbol{u}|^3}\boldsymbol{u}$ を考える．地球の半径を r とし，高さ h までの打ち上げの軌道として，$\boldsymbol{l}\colon [r, r+h] \to \mathbb{R}^3, \boldsymbol{l}(t) := (t, 0, 0)$ が表す線分を考える．$-\displaystyle\int_{\boldsymbol{l}} \boldsymbol{G}\cdot d\boldsymbol{l}$ を求めよ．
   (2) $\boldsymbol{m}\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3, \boldsymbol{m}(t) = (0, R\cos t, R\sin t)$ が表す曲線に対し，$-\displaystyle\int_{\boldsymbol{m}} \boldsymbol{G}\cdot d\boldsymbol{m}$ を求めよ．
   (3) (1) の線積分の $h \to +\infty$ における極限値が有限であることを示し，その物理的な意味を考えよ．

6. （教科書 p. 51 参照：「関数論」で当該箇所を学んだ後に考えてみてください）
   $z \in \mathbb{C}$ と関数 $h\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ を実部と虚部に分け，$z = x + \sqrt{-1}\,y, h(z) = f(x, y) + \sqrt{-1}\,g(x, y)$ と書く．曲線 $\boldsymbol{l}\colon [a, b] \to \mathbb{C}$ とベクトル場 $\boldsymbol{V} = \begin{pmatrix} f \\ -g \end{pmatrix}, \boldsymbol{W} = \begin{pmatrix} g \\ f \end{pmatrix}$ に対し，$\displaystyle\int_{\boldsymbol{l}} h(z)\,dz = \int_{\boldsymbol{l}} \boldsymbol{V}\cdot d\boldsymbol{l} + \sqrt{-1}\int_{\boldsymbol{l}} \boldsymbol{W}\cdot d\boldsymbol{l}$ を示せ．

（提出の必要はありません）

補足． 同一の正則曲線 L を表す正則パラメータ $\boldsymbol{l}, \boldsymbol{m}$ に対し，$\boldsymbol{m} = \boldsymbol{l} \circ h$ となる変数変換 h を取るとき，$s \in \mathbb{R}$ と $t = h(s)$ について $\dfrac{d\boldsymbol{l}}{dt}(t) = h'(s)\dfrac{d\boldsymbol{m}}{ds}(s)$ が成り立ちます．これらは L 上の点 $\boldsymbol{l}(t) = \boldsymbol{m}(s)$ における速度ベクトルで，パラメータを変えても接線の方向は変わらないことを意味します．**ある 1 つの** s について $h'(s) > 0$ であるとき，$\boldsymbol{l}$ と $\boldsymbol{m}$ は L に**同じ向き**を定めるといい，$h'(s) < 0$ のときは**逆の向き**を定めるといいます．問題 4 (1) より，ある 1 つの s_0 について $h'(s_0) > 0$ ならば，任意の $s \in \mathbb{R}$ に対し $h'(s) > 0$ です（0 を通過しない限り符号は変わらない）．よって $\boldsymbol{l} \approx \boldsymbol{m}$ か否かは，どの点で速度ベクトルの向きを比べるかによりません．

ベクトル場 $\boldsymbol{V}$ の，**向きのついた**曲線 L に沿った線積分は，向きを変えない限りはパラメータによらず，向きを逆にすると -1 倍になります．このことから $\displaystyle\int_{\boldsymbol{l}} \boldsymbol{V}\cdot d\boldsymbol{l}$ を $\displaystyle\int_{L} \boldsymbol{V}\cdot d\boldsymbol{l}$ と書くことに意味があり，$\displaystyle\int_{-L} \boldsymbol{V}\cdot d\boldsymbol{l} = -\int_{L} \boldsymbol{V}\cdot d\boldsymbol{l}$ が成り立ちます．ただし $-L$ は向きを逆にした曲線です．問題 3 はこのことの具体例です．今後も「向き」はいたるところに現れ，積分の符号を決める重要な要素です．たかが ± 1 のことではありますが，「向き」の取り扱いは非常にややこしく，頭の痛い問題であることが徐々にわかってきます．

http://math.shinshu-u.ac.jp/~ksakai/19_geometry/19_geometry.html

幾何入門 レポート問題 4（2019 年 5 月 10 日）

担当：境 圭一

各自の学籍番号の下 2 桁を a とおく．例えば 18S1078P なら $a = 78$, 18S1089Q なら $a = 89$.
$r = (a+1)(60-a)$ とする．$\mathbb{R}^2 - \{\mathbf{0}\}$ 上のベクトル場 $\boldsymbol{V}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := \dfrac{1}{x^2+y^2}\begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$ と，曲線のパラメータ $\boldsymbol{l}\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2 - \{\mathbf{0}\}$, $\boldsymbol{l}(t) = r\begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$ について，線積分 $\displaystyle\int_l \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{l}$ を計算せよ．

（5/17 の 3 限開始時までに提出してください）

http://math.shinshu-u.ac.jp/~ksakai/19_geometry/19_geometry.html