幾何入門 演習問題 5（2019 年 5 月 17 日）

担当：境 圭一

1. (1) $\mathbb{R}^2$ 上のベクトル場 $\boldsymbol{V}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 5x^4+8x^3y-9x^2y^2+10xy^3-2y^4 \\ 2x^4-6x^3y+15x^2y^2-8xy^3+5y^4 \end{pmatrix}$ と，$\boldsymbol{l}(t) := \begin{pmatrix} t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}$ $(0 \leq t \leq 1)$ で表される曲線に対し，$\displaystyle\int_{\boldsymbol{l}} \boldsymbol{V}\cdot d\boldsymbol{l}$ を定義通り計算せよ．

(2) (1) の $\boldsymbol{V}$ に対し，$\boldsymbol{V} = \mathrm{grad}(f)$ となる関数 $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ をひとつ見つけよ．これを利用して $\displaystyle\int_{\boldsymbol{l}} \boldsymbol{V}\cdot d\boldsymbol{l}$ を計算せよ．

2. (1), (2) では $\Omega = \mathbb{R}^2$, (3), (4) では $\Omega = \mathbb{R}^2 - \{\boldsymbol{0}\}$ とする．Ω 上の以下のようなベクトル場 $\boldsymbol{V}$ と，$\boldsymbol{l}$ で表される曲線について，$\displaystyle\int_{\boldsymbol{l}} \boldsymbol{V}\cdot d\boldsymbol{l}$ を計算せよ．ただし $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \Omega$ である．

(1) $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{u}) := \begin{pmatrix} x^2-y \\ y^2-x \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{l}(t) := \begin{pmatrix} t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}$ $(0 \leq t \leq 1)$　(2) $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{u}) := \begin{pmatrix} -\sin x \sin y \\ \cos x \cos y \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{l}(t) := \begin{pmatrix} t \\ 3t \end{pmatrix}$ $(-\frac{\pi}{4} \leq t \leq \frac{\pi}{4})$

(3) $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{u}) := \dfrac{2\boldsymbol{u}}{|\boldsymbol{u}|^2}$, $\boldsymbol{l}(t) := \begin{pmatrix} t-1 \\ 2t+1 \end{pmatrix}$ $(-1 \leq t \leq 1)$　(4) $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{u}) := \dfrac{1}{|\boldsymbol{u}|^4}\begin{pmatrix} y(y^2-x^2) \\ x(x^2-y^2) \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{l}(t) := \begin{pmatrix} t \\ 1-t \end{pmatrix}$ $(0 \leq t \leq 2)$

3. (1) $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ を $\mathbb{R}^n$ 内の領域 Ω 上の C^∞ 級関数とし，$\boldsymbol{l}\colon [a,b] \to \Omega$ を曲線のパラメータで $\boldsymbol{l}(a) = \boldsymbol{l}(b)$ をみたすものとする．このとき $\displaystyle\int_{\boldsymbol{l}} \mathrm{grad}(f)\cdot d\boldsymbol{l} = 0$ を示せ．

(2) $\mathbb{R}^2$ 上のベクトル場 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{u}) := \begin{pmatrix} 2y \\ x \end{pmatrix}$ と $\boldsymbol{l}\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{l}(t) := \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$ に対し，$\displaystyle\int_{\boldsymbol{l}} \boldsymbol{V}\cdot d\boldsymbol{l}$ を計算せよ．

(3) (2) の $\boldsymbol{V}$ に対し，$\boldsymbol{V} = \mathrm{grad}(f)$ となる C^∞ 級関数 $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ は存在しないことを示せ．

4. (1) $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ を連続関数とする．$\Omega_f := \{\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n \mid f(\boldsymbol{u}) < 0\}$ が $\emptyset$ でないとき，Ω_f は $\mathbb{R}^n$ の開集合であることを示せ．

(2) $\mathbb{R}^n$ 自身は $\mathbb{R}^n$ の開集合であることを示せ．$A := \{\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n \mid |\boldsymbol{u}| \geq 1\}$ は $\mathbb{R}^n$ の開集合ではないことを示せ．

5. Λ を（可算とは限らない）集合とし，各 $\lambda \in \Lambda$ に対し $\mathbb{R}^n$ の開集合 U_λ が定まっているとする．このとき，$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$ と $\bigcap_{k=1}^m U_{\lambda_k}$ $(\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \Lambda)$ はともに $\mathbb{R}^n$ の開集合であることを示せ．$\bigcap_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$ が開集合とならない例を挙げよ．

6. (1) $U, V \subset \mathbb{R}^n$ が弧状連結で $U \cap V \neq \emptyset$ であるとき，和集合 $U \cup V$ も弧状連結であることを示せ．

(2) 弧状連結な $U, V \subset \mathbb{R}^n$ で，共通部分 $U \cap V$ は弧状連結でないようなものの例を挙げよ．

7. Ω を $\mathbb{R}^n$ 内の領域とする．

(1) $\boldsymbol{l}, \boldsymbol{m}$ を Ω 内の曲線のパラメータとするとき，$\dfrac{d(\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{m})}{dt}(t) = \dfrac{d\boldsymbol{l}}{dt}(t)\cdot\boldsymbol{m}(t) + \boldsymbol{l}(t)\cdot\dfrac{d\boldsymbol{m}}{dt}(t)$ であることを示せ．ただし関数 $\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{m}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は $(\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{m})(t) := \boldsymbol{l}(t)\cdot\boldsymbol{m}(t)$（右辺は $\mathbb{R}^n$ の内積）で定める．

(2) Ω 内の物体 P が，各点 $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n$ において力 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{u})$ を受けて運動しているとする．$\boldsymbol{F} = -\mathrm{grad}(f)$ であると仮定し，時刻 t における P の位置を $\boldsymbol{p}(t)$ とおくとき，$E(t) := \dfrac{1}{2}\left|\dfrac{d\boldsymbol{p}}{dt}(t)\right|^2 + f(\boldsymbol{p}(t))$ を P の**エネルギー**とよぶ．E は定数関数である，つまり $\dfrac{dE}{dt} = 0$ であることを，**運動方程式** $\dfrac{d^2\boldsymbol{p}}{dt^2}(t) = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{p}(t))$ が成立することを使って示せ．

（提出の必要はありません）

補足． $\mathbb{R}^n$ の開集合，弧状連結性などについては，後期の「位相空間論」において，より一般的な視点から論じます．この講義で大切なのは，領域と言ったら弧状連結な開集合のことを指し，従って領域 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ について (1) 任意の $\boldsymbol{u} \in \Omega$ に対し，$U(\boldsymbol{u}; r) \subset \Omega$ となる $r > 0$ が存在し，(2) 任意の $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \Omega$ を結ぶ曲線 $\boldsymbol{l}\colon [0,1] \to \Omega$ が存在する，ということです．より重要なのは (1) で，各点 $\boldsymbol{u} \in \Omega$ の「近く」がすべて Ω に含まれることを意味します．Ω 上の関数 $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ の，$\boldsymbol{u} \in \Omega$ における $\boldsymbol{v}$ 方向の方向微分とは $\lim_{\epsilon\to 0}(f(\boldsymbol{u}+\epsilon\boldsymbol{v}) - f(\boldsymbol{u}))/\epsilon$ でしたが，Ω が開集合であれば，$\epsilon > 0$ を十分小さく取るとき（具体的には，$U(\boldsymbol{u}; r) \subset \Omega$ となる $r > 0$ に対し，$0 < \epsilon < r$ のとき）$\boldsymbol{u} + \epsilon\boldsymbol{v} \in \Omega$ となり $f(\boldsymbol{u} + \epsilon\boldsymbol{v})$ という値が定まるので，問題は起こりません．もし Ω が開集合でないと，いかなる $\epsilon > 0$ に対しても $\boldsymbol{u} + \epsilon\boldsymbol{v} \notin \Omega$ ということがあり得て，$f(\boldsymbol{u} + \epsilon\boldsymbol{v})$ が定まらず，微分が定義されない可能性があります．

問題 7 は，力学的な立場から見た勾配ベクトル場の重要性を示します．考えている系に働く力（例えば重力）がポテンシャルを持つとき，**エネルギー保存則**は運動方程式から数学的に導かれる定理であることがわかります．5/17 の講義でやった定理 5.11 はこの意味で重要です．（力学をやっていない人は，このあたりは気にしなくても構いません）

`http://math.shinshu-u.ac.jp/~ksakai/19_geometry/19_geometry.html`

幾何入門 レポート問題 5（2019 年 5 月 17 日）

担当：境 圭一

各自の学籍番号の下 2 桁を n とおく．例えば 18S1099ζ なら $n = 99$, 18S1100ξ なら $n = 0$. また $a = n + 10$, $b = 70 - n$ とする．

$\mathbb{R}^2$ 上のベクトル場 $\boldsymbol{V} = \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix}$ を $V_1(x, y) = \displaystyle\sum_{k=3}^{a} k^2 x^{k-1} + 6y,\ V_2(x, y) = 6x + \sum_{k=3}^{b} k^2 y^{k-1}$ で定める．パラメータ $\boldsymbol{l}\colon [0, 1] \to \mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{l}(t) := \sqrt{2}\begin{pmatrix} t\cos(\pi t/4) \\ t\sin(\pi t/4) \end{pmatrix}$ で表される曲線に対し，線積分 $\displaystyle\int_{\boldsymbol{l}} \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{l}$ を計算せよ．

（5/24 の 3 限開始時までに提出してください）

http://math.shinshu-u.ac.jp/~ksakai/19_geometry/19_geometry.html