幾何入門 演習問題 6（2019 年 5 月 24 日）

担当：境 圭一

特に断らなければ $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ とする．

1. $L := \{\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \le 1,\ y = \pm 1\} \cup \{\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^2 \mid x = \pm 1,\ |y| \le 1\}$ とおく．
   (1) L を図示せよ．また L が囲む有界領域 Ω を図示せよ．
   (2) L を表すパラメータ $\boldsymbol{l}\colon [0,4] \to \mathbb{R}^2$ で，区分的に正則であり，Ω が導く向きを表すものを 1 つ求めよ．（ヒント：4 つに区切って場合分けして定義するとよい）
   (3) (2) で定めたパラメータに対し，$\boldsymbol{l}(t) \in L$ における法ベクトル $\hat{\boldsymbol{n}}(t)$ を求めよ．
   (4) $\mathbb{R}^2 - \{\boldsymbol{0}\}$ 上のベクトル場 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{u}) := \dfrac{\boldsymbol{u}}{|\boldsymbol{u}|^2}$ に対し，$\displaystyle\int_{\boldsymbol{l}} \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n}\, d\boldsymbol{l}$ を計算せよ．
2. 次の領域 Ω とベクトル場 $\boldsymbol{V}$ に対し，境界 $L := \partial\Omega$ の周期的な正則パラメータ $\boldsymbol{l}$ で，Ω が導く向きを表すものを 1 つ与え，$\displaystyle\int_{\boldsymbol{l}} \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n}\, d\boldsymbol{l}$ を計算せよ．
   (1) $\Omega := \{\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^2 \mid (x-a)^2 + (y-b)^2 < 1\}$, $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{u}) := \begin{pmatrix} x+y \\ -y \end{pmatrix}$　　(2) $\Omega := \{\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^2 \mid \dfrac{x^2}{4} + y^2 < 1\}$, $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{u}) := \begin{pmatrix} x+2xy \\ x-y^2 \end{pmatrix}$
   (3) $\Omega := \{\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < |\boldsymbol{u}|\}$, $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{u}) := \dfrac{\boldsymbol{u}}{|\boldsymbol{u}|^2}$（問題 3 も参照せよ）
3. $r > 0$ に対し，$L_r := \{\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \le r,\ y = \pm r\} \cup \{\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^2 \mid x = \pm r,\ |y| \le r\}$ とおく．問題 1 の L は L_1 である．
   (1) L_1 と L_2 で囲まれる有界領域 Ω を図示せよ．
   (2) L_1, L_2 のパラメータ $\boldsymbol{l}_1, \boldsymbol{l}_2$ で，周期的，区分的に正則で，Ω が導く向きを表すようなものを 1 つ求めよ．
   (3) $\boldsymbol{l}_1$ と問題 1. (2) のパラメータは L_1 に同じ向きを定めるか？
   (4) Ω の補集合 $\mathbb{R}^2 - \Omega := \{\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^2 \mid \boldsymbol{u} \notin \Omega\}$（講義では Ω^c と書いた）は有界ではないことを示せ．
4. (1) 領域 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 上のベクトル場 $\boldsymbol{V} = \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix}\colon \Omega \to \mathbb{R}^2$ に対し，Ω 上のベクトル場 $\widetilde{\boldsymbol{V}}\colon \Omega \to \mathbb{R}^2$ を $\widetilde{\boldsymbol{V}} := \begin{pmatrix} -V_2 \\ V_1 \end{pmatrix}$ で定める．Ω 内の曲線 L を表すパラメータ $\boldsymbol{l}$ に対し，$\displaystyle\int_{\boldsymbol{l}} \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n}\, d\boldsymbol{l} = \int_{\boldsymbol{l}} \widetilde{\boldsymbol{V}} \cdot d\boldsymbol{l}$ を示せ．
   (2)（教科書 p. 31 の補題 1.44 参照）$\boldsymbol{l}, \boldsymbol{m}$ を曲線 $L \subset \mathbb{R}^2$ を表す正則パラメータとし，$\boldsymbol{l}, \boldsymbol{m}$ に対応する法ベクトルを $\boldsymbol{n}_l, \boldsymbol{n}_m$ とする．$\boldsymbol{l}$ と $\boldsymbol{m}$ が L に同じ向きを定めるとき，$\displaystyle\int_{\boldsymbol{l}} \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n}_l\, d\boldsymbol{l} = \int_{\boldsymbol{m}} \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n}_m\, d\boldsymbol{m}$ を示せ．また $\boldsymbol{l}$ と $\boldsymbol{m}$ が L に逆の向きを定めるとき，$\displaystyle\int_{\boldsymbol{l}} \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n}_l\, d\boldsymbol{l} = -\int_{\boldsymbol{m}} \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n}_m\, d\boldsymbol{m}$ を示せ．

（提出の必要はありません）

補足．講義で与えた線積分（その 2）の定義 6.8 が，教科書の定義 1.43 と同一のものであることを説明しておきます．一般に $\mathbb{R}^2$ 内の曲線のパラメータ $\boldsymbol{l} = \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \end{pmatrix}$ に対し，$R = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$（時計回りの $\dfrac{\pi}{2}$ 回転を表す）とおけば，法ベクトルは $\hat{\boldsymbol{n}}(t) := R\dfrac{d\boldsymbol{l}}{dt}(t) = \begin{pmatrix} l_2'(t) \\ -l_1'(t) \end{pmatrix}$ です．$|\hat{\boldsymbol{n}}(t)| = \left|\dfrac{d\boldsymbol{l}}{dt}(t)\right| \cdots (*)$ が成立し，$|\hat{\boldsymbol{n}}(t)|$ は t に依存して変化しますが，$\boldsymbol{l}$ が正則なら 0 にはなりません．よって $\boldsymbol{n}(t) := |\hat{\boldsymbol{n}}(t)|^{-1}\,\hat{\boldsymbol{n}}(t)$ というベクトルが定義され（分母が 0 にならない），$\boldsymbol{n}(t)$ は $\hat{\boldsymbol{n}}(t)$ と同じ向きのベクトルで，t によらず $|\boldsymbol{n}(t)| = 1$ です．この $\boldsymbol{n}$ が教科書 28 ページの**単位法ベクトル**です．「単位」というのは長さが 1 であることを指します．$\boldsymbol{n}$ の定義と $(*)$ より $\hat{\boldsymbol{n}}(t) = |\hat{\boldsymbol{n}}(t)|\,\boldsymbol{n}(t) = \left|\dfrac{d\boldsymbol{l}}{dt}(t)\right|\boldsymbol{n}(t)$ ですから，講義の定義 6.8 の意味での線積分（その 2）は $\displaystyle\int_{\boldsymbol{l}} \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n}\, d\boldsymbol{l} = \int_a^b \boldsymbol{V}(\boldsymbol{l}(t)) \cdot \hat{\boldsymbol{n}}(t)\, dt = \int_a^b \left|\frac{d\boldsymbol{l}}{dt}(t)\right| \boldsymbol{V}(\boldsymbol{l}(t)) \cdot \boldsymbol{n}(t)\, dt$ とも書けます．これは教科書の定義 1.43 に一致します．後者だと $\hat{\boldsymbol{n}}(t)$ を $\left|\dfrac{d\boldsymbol{l}}{dt}(t)\right|$ で割って $\boldsymbol{n}(t)$ を求めたあと，もう一度 $\left|\dfrac{d\boldsymbol{l}}{dt}(t)\right|$ をかけることになって二度手間なので（具体的に計算してみるとわかる），講義では前者を採用しました．

問題 4 (1) は，$\boldsymbol{V} = {}^t R\widetilde{\boldsymbol{V}}$ であることと（左上の“t”は転置），ベクトルの内積 $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}$ が行列の積 ${}^t\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}$ に等しいことを使います．$\boldsymbol{V}$ の線積分（その 2）とは $\widetilde{\boldsymbol{V}}$ の線積分（その 1）である，ということを意味し，線積分（その 1）がパラメータによらず向きだけで定まることから，線積分（その 2）についても同じことが成り立つ，というのが (2) の内容です．

幾何入門 レポート問題 **6**（**2019** 年 **5** 月 **24** 日）

担当：境 圭一

各自の学籍番号の下 2 桁を n とおく．例えば 18S1101X なら $n = 1$, 18S1102Y なら $n = 2$. また $a = n + 100$ とする．$\Omega := \left\{\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid \left(\frac{x}{a}\right)^2 + y^2 > 1\right\}$ とおく．Ω が導く向きを表すような $\partial\Omega$ の正則周期的パラメータ $\boldsymbol{l}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ を 1 つ求めよ（向きの選び方がわかるように記述せよ）．$\mathbb{R}^2 - \{\boldsymbol{0}\}$ 上のベクトル場 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{u}) := \dfrac{1}{x^2 + a^2y^2}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ に対し，$\displaystyle\int_{l} \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n}\, d\boldsymbol{l}$ を計算せよ．

（5/31 の 3 限開始時までに提出してください）

http://math.shinshu-u.ac.jp/~ksakai/19_geometry/19_geometry.html