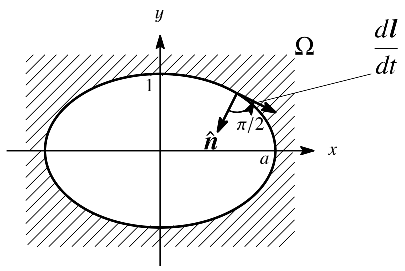
幾何入門 レポート 6（2019 年 5 月 24 日）コメント

担当：境 圭一

Ω は楕円の外側なので，Ω が $\partial\Omega$ に導く向きは法ベクトル $\hat{\boldsymbol{n}}$ が楕円の「内側」を向くような向き，従って「時計回り」の向きです．例えば下のような絵を描けば，きちんと定義に従って向きを決定できている，ということが伝わります．



$\partial\Omega$ を表すパラメータとしては，例えば $\boldsymbol{l}(t) := \begin{pmatrix} a\cos(-t) \\ \sin(-t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\cos t \\ -\sin t \end{pmatrix}$（周期は 2π です）を取ればよいでしょう．あとは定義通りに計算すれば，求める積分値は $-\dfrac{2\pi}{a}$ であることがわかります．

同じ曲線でも，どの領域の境界と見るかによって入れるべき向きは変わりますから，このステップは疎かにすべきではありません．実際，$\partial\Omega$ の向きを反対にしてしまった場合は，答の符号も反対になってしまいます．向きについては

- 法ベクトルが向くべき方向が…で，
- 従って速度ベクトルは…を向くべき

という手順で説明されるべきです．

5/31 の講義で Gauss の発散定理を学びました．この問題の $\boldsymbol{V}$ については $\mathrm{div}\boldsymbol{V} = 0$ ですが,

（誤り）$\mathrm{div}\boldsymbol{V} = 0$ だから，Gauss の発散定理により $\displaystyle\int_l \boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{n}\,d\boldsymbol{l} = \int_\Omega \mathrm{div}\boldsymbol{V}\,dxdy = \int_\Omega 0\,dxdy = 0$

としてはいけません．Ω が有界でないからです．

$\boldsymbol{l}(t) = \begin{pmatrix} a\cos(-t) \\ \sin(-t) \end{pmatrix}$ のままで速度ベクトルを計算しようとするとミスの元です．$\begin{pmatrix} a\cos t \\ -\sin t \end{pmatrix}$ に書き換えてから計算すべきでしょう．また

（よくない）$\boldsymbol{l}(t+2\pi) = \boldsymbol{l}(t)$ だから $\boldsymbol{l}$ の周期は 2π

というのは正確ではありません．$\boldsymbol{l}(t+4\pi) = \boldsymbol{l}(t)$ も成り立ちますが，$\boldsymbol{l}$ の周期は 4π ではありません．正しくは

（よい）すべての $t \in \mathbb{R}$ に対し $\boldsymbol{l}(t+T) = \boldsymbol{l}(t)$ となる**最小の正の値** T は $T = 2\pi$ だから，$\boldsymbol{l}$ の周期は 2π

と書くべきです．