幾何入門 演習問題 7（2019 年 5 月 31 日）

担当：境 圭一

特に断らなければ領域や曲線はすべて $\mathbb{R}^2$ 内のものとし，$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とする．

1. 領域 Ω 上のベクトル場 $\boldsymbol{V}, \boldsymbol{W}\colon \Omega \to \mathbb{R}^2$ と C^∞ 級関数 $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ に対し，ベクトル場 $\boldsymbol{V}+\boldsymbol{W}, f\boldsymbol{V}\colon \Omega \to \mathbb{R}^2$ をそれぞれ $(\boldsymbol{V}+\boldsymbol{W})(\boldsymbol{u}) := \boldsymbol{V}(\boldsymbol{u}) + \boldsymbol{W}(\boldsymbol{u}), (f\boldsymbol{V})(\boldsymbol{u}) := f(\boldsymbol{u})\boldsymbol{V}(\boldsymbol{u})$ で定義する．次の等式が成り立つことを示せ．
   (1) $\mathrm{div}(a\boldsymbol{V}+b\boldsymbol{W}) = a\,\mathrm{div}\boldsymbol{V} + b\,\mathrm{div}\boldsymbol{W}$,　$\mathrm{rot}(a\boldsymbol{V}+b\boldsymbol{W}) = a\,\mathrm{rot}\boldsymbol{V} + b\,\mathrm{rot}\boldsymbol{W}$ （ただし $a, b \in \mathbb{R}$ は定数）
   (2) $\mathrm{div}(f\boldsymbol{V}) = \mathrm{grad}(f)\cdot\boldsymbol{V} + f\,\mathrm{div}\boldsymbol{V}$,　$\mathrm{rot}(f\boldsymbol{V}) = \mathrm{grad}(f)\cdot\widetilde{\boldsymbol{V}} + f\,\mathrm{rot}\boldsymbol{V}$,　ただし $\boldsymbol{V} = \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix}$ とするとき，$\widetilde{\boldsymbol{V}} := \begin{pmatrix} V_2 \\ -V_1 \end{pmatrix}$
   (3) $\mathrm{rot}(\mathrm{grad}(f)) = 0$ （注：このことから「$\mathrm{rot}\boldsymbol{V} \neq 0 \implies \boldsymbol{V} = \mathrm{grad}(f)$ をみたす f は存在しない $\cdots (*)$」がわかる）
   (4) $\mathrm{div}(\mathrm{grad}(f)) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ （注：$\mathrm{div}(\mathrm{grad}(f)) = 0$ を **Laplace 方程式**，その解 f を**調和関数** (harmonic function) と呼ぶ）

2. (1) 領域 $\Omega := \mathbb{R}^2 \setminus \{\boldsymbol{0}\}$ 上のベクトル場 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{u}) := \dfrac{1}{x^2+y^2}\begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}$ を考える．$\mathrm{rot}\boldsymbol{V}$ を計算せよ．
   (2) $\boldsymbol{l}\colon [0, 2\pi] \to \Omega$ を $\boldsymbol{l}(t) := \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$ で定義する．$\displaystyle\int_{\boldsymbol{l}} \boldsymbol{V}\cdot d\boldsymbol{l}$ を計算することにより，$\boldsymbol{V} = \mathrm{grad}(f)$ となる $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ は存在しないことを示せ．（問題 1. (3) $(*)$ の逆の反例になっている）

3. (1) $\Omega := \{\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^2 \mid (x/2)^2 + (y/3)^2 < 1\}$ とおく．$\partial\Omega$ を表す周期的正則パラメータ $\boldsymbol{l}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ で，Ω が導く向きを表すものを 1 つ求めよ．
   (2) $\boldsymbol{V}$ を問題 2 のベクトル場とする．$\displaystyle\int_{\boldsymbol{l}} \boldsymbol{V}\cdot d\boldsymbol{l}$ の計算を試みよ．
   (3) $0 < \epsilon < 2$ とする．$M := \{\boldsymbol{u} \in \Omega \mid |\boldsymbol{u}| = \epsilon\}$ とし，$\partial\Omega$ と M で囲まれた有界領域を Ω' とおく．Ω' が導く M の向きを表す周期的正則パラメータ $\boldsymbol{m}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ を一つ求めよ．
   (4) $\displaystyle\int_{\boldsymbol{m}} \boldsymbol{V}\cdot d\boldsymbol{m}$ を求めよ．Green の公式を使って $\displaystyle\int_{\boldsymbol{l}} \boldsymbol{V}\cdot d\boldsymbol{l}$ を求めよ．

4. $\Omega := \mathbb{R}^2 - \left\{\boldsymbol{0}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$ 上のベクトル場 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{u}) := \dfrac{1}{x^2+y^2}\begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} + \dfrac{1}{(2-x)^2+y^2}\begin{pmatrix} -y \\ 2-x \end{pmatrix}$ と，$\boldsymbol{l}(t) := \begin{pmatrix} 2\cos t + 1 \\ 2\sin t \end{pmatrix}$ で表される閉曲線に対し，$\displaystyle\int_{\boldsymbol{l}} \boldsymbol{V}\cdot d\boldsymbol{l}$ を計算せよ．

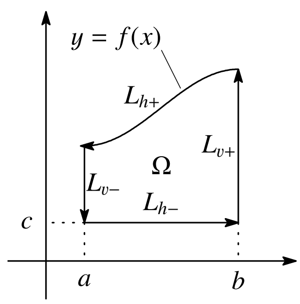
（提出の必要はありません）

補足 1. 講義で述べたように，Gauss の発散定理は，ベクトル場に対する微分積分学の基本定理の類似とみなすことができます．本質的に同じ定理である Green の公式も同様です．この意味で，$\mathrm{div}\boldsymbol{V}$ や $\mathrm{rot}\boldsymbol{V}$, 線積分（その 1・その 2）は，ベクトル場の「微分・積分」として正統なものと言えます．演習問題 5 の補足も参照してください．
今回の問題 2 で，問題 1. (3) の $(*)$ の逆が成り立たない，ということを見ました．問題 2 ではベクトル場の分母が 0 になるのを避けるため，領域として $\mathbb{R}^2$ から $\boldsymbol{0}$ を取り除いたものを考えました．実は，このように領域に「穴を空けた」ことが，$(*)$ の逆が成り立たなかった原因です．実は「穴が空いていない」領域（**単連結領域**とよぶ）においては $(*)$ の逆が成立します．これらの事実は，線積分により領域の幾何学的な特徴（ここでは「穴の有無」のこと）を抽出できることを示します．詳細はこの講義の最終回で述べる予定です．

補足 2. 講義で述べたように，Gauss の発散定理

$$\int_\Omega \mathrm{div}\boldsymbol{V}\,dxdy = \sum_{i=1}^{k} \int_{\boldsymbol{l}_i} \boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{n}\,d\boldsymbol{l}_i \qquad (*)$$

の証明は，$\Omega = \{\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq f(x)\}$ の形である場合（右図参照，このとき $k = 1$）に示されれば十分で，この場合は直接計算することにより示されます．以下にその概要をまとめます．詳細は演習問題とします．



以下 $\partial_x f := \dfrac{\partial f}{\partial x}$ のように略記することにします．まず $(*)$ の左辺を考えます．

問題 1. $\displaystyle\int_{\Omega} \mathrm{div}\boldsymbol{V}\,dxdy = \underbrace{\int_{x=a}^{b}\Big(\int_{y=c}^{f(x)} (\partial_x V_1)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} dy\Big)\,dx}_{(1)} + \int_a^b \Big(\underbrace{V_2\begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}}_{(2)} \underbrace{-V_2\begin{pmatrix} x \\ c \end{pmatrix}}_{(3)}\Big)\,dx$ であることを示せ．

(1) の部分を考えます．まず

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\int_c^{f(x)} V_1\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} dy &= \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\epsilon}\Big(\int_c^{f(x+\epsilon)} V_1\begin{pmatrix} x+\epsilon \\ y \end{pmatrix} dy - \int_c^{f(x)} V_1\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} dy\Big) \\ &= \lim_{\epsilon\to 0}\Big(\underbrace{\frac{1}{\epsilon}\int_{f(x)}^{f(x+\epsilon)} V_1\begin{pmatrix} x+\epsilon \\ y \end{pmatrix} dy}_{(a)} + \underbrace{\frac{1}{\epsilon}\int_c^{f(x)}\Big(V_1\begin{pmatrix} x+\epsilon \\ y \end{pmatrix} - V_1\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\Big) dy}_{(b)}\Big)\end{aligned}$$

に注意します．

問題 2. (i) (a) $\xrightarrow{\epsilon\to 0} f'(x)V_1\begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}$ を示せ．（ヒント：$g(s) := \displaystyle\int_{f(x)}^{f(x+s)} V_1\begin{pmatrix} x+s \\ y \end{pmatrix} dy$ とおくと $(a) = g'(0)$. $g'(s)$ を計算するには，V_1 の y に関する原始関数を使うとよい）

(ii) (b) $\xrightarrow{\epsilon\to 0} \displaystyle\int_c^{f(x)} (\partial_x V_1)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} dy$ を使って，$(1) = \Big(\underbrace{\int_c^{f(b)} V_1\begin{pmatrix} b \\ y \end{pmatrix} dy}_{(1-1)} \underbrace{- \int_c^{f(a)} V_1\begin{pmatrix} a \\ y \end{pmatrix} dy}_{(1-2)}\Big) \underbrace{- \int_a^b f'(x)V_1\begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix} dx}_{(1-3)}$ を示せ．

次に $(*)$ の右辺を考えます．$\partial\Omega$ の 4 辺に右上図のような名前をつければ $\displaystyle\int_{\partial\Omega} \boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{n}\,d\boldsymbol{l} = \int_{L_{v-}} + \int_{L_{h-}} + \int_{L_{v+}} + \int_{L_{h+}}$ です．本来は $\partial\Omega$ を一つの周期的パラメータで表すべきところですが，線積分を計算するには結局 4 辺それぞれに分割して計算しますから，個別にパラメータを与えて計算すれば十分です．

問題 3. $\partial\Omega$ の 4 辺を次のようにパラメータづけする：

- L_{v-} : $\boldsymbol{l}(t) = (a,\,-t)$ $(c \le -t \le f(a))$
- L_{h-} : $\boldsymbol{l}(t) = (t,\,c)$ $(a \le t \le b)$
- L_{v+} : $\boldsymbol{l}(t) = (b,\,t)$ $(c \le t \le f(b))$
- L_{h+} : $\boldsymbol{l}(t) = (-t,\,f(-t))$ $(a \le -t \le b)$

これらを用いて

$$\int_{L_{v-}} = \text{(1-2)},\quad \int_{L_{h-}} = (3),\quad \int_{L_{v+}} = \text{(1-1)},\quad \int_{L_{h+}} = \text{(1-3)} + (2)$$

を示せ．

幾何入門 レポート問題 7（2019 年 5 月 31 日）

担当：境 圭一

各自の学籍番号の下 2 桁を n とおく．例えば 18S1098P なら $n = 98$, 18S1076Q なら $n = 76$. また $a = n + 100$ とする．$\Omega := \mathbb{R}^2 - \{\mathbf{0}\}$ 上のベクトル場 $\boldsymbol{V}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := \dfrac{1}{ax^2 + y^2}\begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$ に対し，$\boldsymbol{V} = \mathrm{grad}(f)$ となる $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ は存在するか？存在するならばそれを 1 つ求め，存在しないならばそのことを証明せよ．

締切：**6/6**（木）**13:00**（研究室 (A403) で受け付けます）

http://math.shinshu-u.ac.jp/~ksakai/19_geometry/19_geometry.html