幾何入門 レポート 7（2019 年 5 月 31 日）コメント

担当：境 圭一

$\boldsymbol{l}\colon \mathbb{R} \to \Omega$ を，例えば $\boldsymbol{l}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sqrt{a}\sin t \end{pmatrix}$ と定義すると，$\boldsymbol{l}$ は閉曲線のパラメータになっていて，

$$\int_{l} \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{l} = \frac{2\pi}{\sqrt{a}}$$

であることが確かめられます．もし $\boldsymbol{V} = \mathrm{grad}(f)$ となる $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ が存在したとすると，この線積分は $f(\boldsymbol{l}(2\pi)) - f(\boldsymbol{l}(0)) = 0$ になるはずですから，このような f は存在しないことになります．

この問題の $\boldsymbol{V}$ は $\mathrm{rot}\boldsymbol{V} = 0$ をみたしますが，このことからは $\boldsymbol{V}$ のポテンシャルの有無については**何もわからない**ことに注意してください（従って，この問題では $\mathrm{rot}\boldsymbol{V} = 0$ である事実を答案に書く必要はありません）．
正しい主張は

（正しい）ある $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ について $\boldsymbol{V} = \mathrm{grad}(f)$ となる $\implies \mathrm{rot}\boldsymbol{V} = 0,$

あるいはその対偶である

（正しい）$\mathrm{rot}\boldsymbol{V} \neq 0 \implies \boldsymbol{V} = \mathrm{grad}(f)$ となる $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ は存在しない

です．
次の類の答案は**誤り**です．

（誤り）“ $f(\boldsymbol{u}) = -\dfrac{1}{\sqrt{a}} \tan^{-1}\Big(\dfrac{\sqrt{a}\,x}{y}\Big)$ とおくと $\boldsymbol{V} = \mathrm{grad}(f)$ ”

この f の勾配ベクトル場は確かに $\dfrac{1}{ax^2 + y^2}\begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$ ですが，この f は x 軸上定義されません．この f は，$\boldsymbol{V}$ を $\Omega' := \Omega - (x\text{ 軸})$ に制限したベクトル場のポテンシャルです．問題で問われているのは Ω 上での $\boldsymbol{V}$ のポテンシャルの有無です．