幾何入門 演習問題 8（2019 年 6 月 14 日）

担当：境 圭一

※今回からスペースの都合で縦ベクトルを横ベクトルの転置として表します．特に断らなければ $\boldsymbol{u} = {}^t(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ です．

1. (1) $S^2 := \{\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^3 \mid |\boldsymbol{u}| = 1\}$ とし，$V_\pm \subset S^2$ を

$$V_+ := \{\boldsymbol{u} \in S^2 \mid -1 < z\}, \quad V_- := \{\boldsymbol{u} \in S^2 \mid z < 1\}.$$

で定義する．$V_+ \cup V_- = S^2$ を示せ．

(2) $\boldsymbol{\varphi}_+ \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ を次のように定義する．$\boldsymbol{a} = {}^t(s,t) \in \mathbb{R}^2$ に対し，$\mathbb{R}^3$ の点 ${}^t(s,t,0)$ と ${}^t(0,0,-1) \in S^2$ を結ぶ直線が V_+ と交わる点を $\boldsymbol{\varphi}_+(\boldsymbol{a})$ と定める．$\boldsymbol{\varphi}_+(\boldsymbol{a})$ を s,t の式で表し，すべての $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^2$ に対し $\boldsymbol{\varphi}_+(\boldsymbol{a}) \in V_+$ であることを示せ．従って $\boldsymbol{\varphi}_+ \colon \mathbb{R}^2 \to V_+$ とみなせる．

(3) $\boldsymbol{\varphi}_+ \colon \mathbb{R}^2 \to V_+$ は全単射であることを，逆写像 $\boldsymbol{\varphi}_+^{-1} \colon V_+ \to \mathbb{R}^2$ を構成することにより示せ．また，Jacobi 行列 $D\boldsymbol{\varphi}_+ = \begin{pmatrix} \partial_s \boldsymbol{\varphi}_+ & \partial_t \boldsymbol{\varphi}_+ \end{pmatrix}$ の階数は，任意の $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^2$ において 2 であることを示せ．これにより，$\boldsymbol{\varphi}_+$ は V_+ の各点の近くでの S^2 の局所座標になることがわかる．

(4) $\boldsymbol{a} = {}^t(s,t) \in \mathbb{R}^2$ に対し，$\mathbb{R}^3$ の点 ${}^t(s,t,0)$ と ${}^t(0,0,1) \in S^2$ を結ぶ直線が V_- と交わる点を $\boldsymbol{\varphi}_-(\boldsymbol{a})$ と定める．(2), (3) と同様にして，$\boldsymbol{\varphi}_- \colon \mathbb{R}^2 \to V_-$ は V_- の各点の近くでの S^2 の局所座標になることを示せ．また $\boldsymbol{\varphi}_-^{-1}$ を具体的に求めよ．

注． この $\boldsymbol{\varphi}_\pm$ あるいは逆写像 $\boldsymbol{\varphi}_\pm^{-1}$ を**立体射影** (stereographic projection) とよぶ．

2. (1) S^2 上の任意の点は $(\cos\alpha\cos\beta,\ \sin\alpha\cos\beta,\ \sin\beta)$ $(0 \le \alpha < 2\pi, -\dfrac{\pi}{2} \le \beta \le \dfrac{\pi}{2})$ の形に表せることを示せ（ヒント：$\mathbb{R}^3$ の極座標）．α, β が一意的に決まらない点はどれか？

(2) S^2 の部分集合

$$A := \{\boldsymbol{u} \in S^2 \mid x \ge 0,\ y = 0\}, \quad B := \{\boldsymbol{u} \in S^2 \mid x \le 0,\ z = 0\}$$

を考え，$V := S^2 - A$, $W := S^2 - B$ とおく．$U := (0, 2\pi) \times \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right) := \left\{{}^t(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < \alpha < 2\pi, -\dfrac{\pi}{2} < \beta < \dfrac{\pi}{2}\right\}$ とおき，$\boldsymbol{\varphi} \colon U \to V$ と $\boldsymbol{\psi} \colon U \to W$ を

$$\boldsymbol{\varphi}(\alpha,\beta) := (\cos\alpha\cos\beta,\ \sin\alpha\cos\beta,\ \sin\beta), \quad \boldsymbol{\psi}(\alpha,\beta) := (\sin\alpha\cos\beta,\ \sin\beta,\ -\cos\alpha\cos\beta)$$

で定義すると，$\boldsymbol{\varphi}$ と $\boldsymbol{\psi}$ はそれぞれ V, W の各点近くでの S^2 の局所座標になることを示せ．

3. $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^3$ に対し $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$（ただし $0 \le \theta < 2\pi, r \ge 0$ とする）とおき，(r, θ, z) を**円柱座標**とよぶ．

(1) 円柱座標で一意的に表せない $\mathbb{R}^3$ の点をすべて求めよ．

(2) 球面 S^2 を円柱座標で表せ．

(3) 円柱座標で $r = 1$ で表される図形 A を図示せよ．また A を xyz 座標で表せ．

(4) xyz 座標で $V := \{(x,y,z) \in A \mid y \ne 1\}$ とおく．$\boldsymbol{\varphi} \colon \mathbb{R}^2 \to V$ を，$\mathbb{R}^2$ の st 座標と $\mathbb{R}^3$ の xyz 座標を使って $\boldsymbol{\varphi}(s,t) := \left(\dfrac{2s}{s^2+1}, \dfrac{s^2-1}{s^2+1}, t\right)$ で定義するとき，$\boldsymbol{\varphi}$ は V の各点の近くでの A の局所座標になることを示せ．（**注．** この $\boldsymbol{\varphi}$ と問題 1 の立体射影の関係に注目せよ）

4. (1) $S := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = \sqrt{x^2+y^2}\}$ とおく．S を図示せよ．（ヒント：問題 3 の円柱座標を使う）

(2) $\boldsymbol{0} \in S$ の近くで S の局所座標を取れないことを示せ．従って S は曲面ではない．（ヒント：C^∞ 級写像 $\boldsymbol{\varphi} \colon U \to S$ で $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{0}$ となる $\boldsymbol{a} \in U$ が存在するものに対し，$\dfrac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial s}(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{0}$ または $\dfrac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial t}(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{0}$ であることを示す）

(3) $S \setminus \{\boldsymbol{0}\}$ は曲面であることを示せ．

5. (1) $S := \{\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 = y^3\}$ とおく．S を図示せよ．

(2) S は曲面ではないことを示せ．（ヒント：$\boldsymbol{0} \in S$ の近くで局所座標を取れないことを前問と同様に示す）

6. $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3$ を 1 次独立なベクトルとするとき，$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \perp \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$ であることを示せ．また $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v})$ は $\mathbb{R}^3$ の基底をなすことを示せ．（第 1 回目にやりましたが，次回以降使うので再掲しました）

（提出の必要はありません）

補足：曲面の局所座標について．

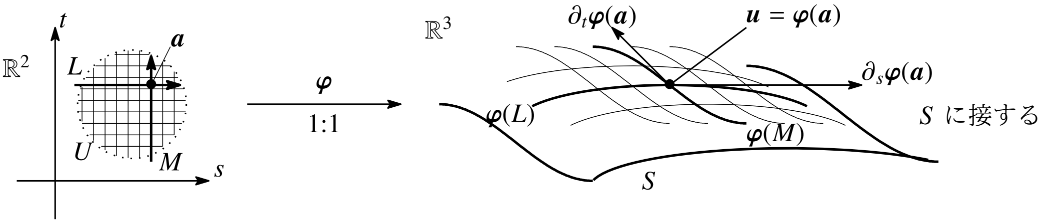
曲面の定義に出てくる，任意の $\boldsymbol{u} \in S$ のまわりで取れる局所座標 $\boldsymbol{\varphi}\colon U \to S$ の意味はわかりにくいと思います．曲線の場合の正則パラメータに対応するものと考えればよいのですが，いろいろ言い換えるうちに意味がつかめてくる，ということもあると思うので，少し補足してみます．

$\boldsymbol{u} \in S$ とします．S が曲面であることから，$\boldsymbol{u}$ のまわりの局所座標が取れます．その定義に出てくる ϵ と $\boldsymbol{\varphi}\colon U \to S$ の性質 (i), (ii) は次のようなことを意味します（あくまで気分であり，数学的に厳密ではありません）：

(i) $\boldsymbol{\varphi}(U) \subset S$ であり，S 上で $\boldsymbol{u}$ に近い点はすべて $\boldsymbol{\varphi}(U)$ に含まれる（二年生後期の「位相空間論」では「$\boldsymbol{\varphi}(U)$ は S における $\boldsymbol{u}$ の近傍である」という言い方をします）

(ii) $\boldsymbol{\varphi}\colon U \to \boldsymbol{\varphi}(U)$ とみると $\boldsymbol{\varphi}$ は全単射で，従って U と $\boldsymbol{\varphi}(U)$ は「同一視」される（正確には $\boldsymbol{\varphi}$ と逆写像の連続性も込めた同一視で，位相空間論では「U と $\boldsymbol{\varphi}(U)$ は同相である」といいます）

(i), (ii) より，$\boldsymbol{u}$ に近い点 $\boldsymbol{v} \in S$ に対し，$\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{v}$ となる $\boldsymbol{b} \in U$ が**唯一つ**存在します．$U \subset \mathbb{R}^2$ ですから，$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ のように，$\boldsymbol{b}$ の位置は 2 つの実数の組（座標）により確定します．(ii) により U と $\boldsymbol{\varphi}(U)$ は同一視されるので，$\boldsymbol{v}$ の $\boldsymbol{\varphi}(U)$ 上での位置も，2 つの実数の組 $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ で確定していると言えます．このように，S が曲面であるとき，任意の $\boldsymbol{u} \in S$ の近くで，平面と同じような「座標」が $\boldsymbol{\varphi}$ を通して定まることになります．
正則曲線の場合は 1 つのパラメータ $\boldsymbol{l}$ で曲線全体を表せたのに対し，曲面の場合は S 全体を 1 つの「座標」で表すのは一般には不可能で，1 つの座標で表せるのは，考えている点 $\boldsymbol{u}$ を含む S の（十分小さい）部分集合のみです．曲線は $\boldsymbol{l}$ の像 $\boldsymbol{l}(t)$ のことでしたが，曲面はいくつかのパラメータ $\boldsymbol{\varphi}_i\colon U_i \to S$ の像の和集合 $\bigcup_i \boldsymbol{\varphi}_i(U_i)$ です．



特に $\boldsymbol{u} \in S$ 自身に対応する U 上の点を $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ とし，$\boldsymbol{a}$ を通る U 上の 2 つの直線

$$L := \{(x, a_2) \in U\}, \quad M := \{(a_1, y) \in U\}$$

を考えます．L, M は $\boldsymbol{a}$ を「原点」とするような「s 軸」,「t 軸」とみなせます（ここでは $\mathbb{R}^2$ の座標として s, t を使います）．$\boldsymbol{\varphi}$ により，L, M は $\boldsymbol{\varphi}(U)$ $(\subset S)$ 上の曲線 $\boldsymbol{\varphi}(L), \boldsymbol{\varphi}(M)$ にうつされます．これらは曲がってはいますが（S が曲がっているから），U は $\boldsymbol{\varphi}(U)$ と同一視されるのでしたから，$\boldsymbol{\varphi}(L), \boldsymbol{\varphi}(M)$ も $\boldsymbol{u}$ を「原点」とする「座標軸」のようになっているものと期待されます．局所座標の条件 (iii) はこのことに関係します：
簡単のため $\boldsymbol{e}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とおき，曲線 L, M のパラメータ $\boldsymbol{l}, \boldsymbol{m}$ を $\boldsymbol{l}(0) = \boldsymbol{m}(0) = \boldsymbol{a}$ となるよう選んでおきます：

$$\boldsymbol{l}(s) := \boldsymbol{a} + s\boldsymbol{e}_1, \quad \boldsymbol{m}(t) := \boldsymbol{a} + t\boldsymbol{e}_2.$$

このとき

$$\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial s}(\boldsymbol{a}) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\epsilon}\Big(\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{a} + \epsilon\boldsymbol{e}_1) - \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{a})\Big) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\epsilon}\Big((\boldsymbol{\varphi} \circ \boldsymbol{l})(\epsilon) - (\boldsymbol{\varphi} \circ \boldsymbol{l})(0)\Big) = \frac{d(\boldsymbol{\varphi} \circ \boldsymbol{l})}{ds}(0),$$

ですから，$\dfrac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial s}(\boldsymbol{a})$ は S 内の曲線 $\boldsymbol{\varphi} \circ \boldsymbol{l}$ の（つまり，$\boldsymbol{\varphi}(L)$ の）$\boldsymbol{u}$ における速度ベクトルです．$\dfrac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial t}(\boldsymbol{a})$ も同様に，$\boldsymbol{u}$ における $\boldsymbol{\varphi}(M)$ の速度ベクトルです．局所座標の条件 (iii) より，これらは 1 次独立です．これは，$\boldsymbol{\varphi}(L)$ と $\boldsymbol{\varphi}(M)$ の接ベクトルが $\boldsymbol{u}$ において平行にはなっていないこと，つまり「座標軸」$\boldsymbol{\varphi}(L), \boldsymbol{\varphi}(M)$ が接したりせず,「横断的に」交わることを意味します（直交はしていないかもしれません）．もし $\boldsymbol{\varphi}(L)$ と $\boldsymbol{\varphi}(M)$ が $\boldsymbol{u}$ において接していると，$\boldsymbol{\varphi}(U)$ 上の「座標軸」だと言うのは無理がありますが，条件 (iii) により，その心配はないことになります．

幾何入門 レポート問題 8（2019 年 6 月 14 日）

担当：境 圭一

各自の学籍番号の下 2 桁の数を $10a+b$ $(a, b \in \mathbb{Z}, 0 \leq a, b \leq 9)$ の形に表す．例えば 18S1067Z なら $(a, b) = (6, 7)$.
$\dfrac{x}{a+1} + \dfrac{y}{b+1} - z = 1$ で表される $\mathbb{R}^3$ 内の平面を H とおく．$\boldsymbol{\varphi}_+^{-1}(S^2 \cap H) \subset \mathbb{R}^2$ は $\dfrac{s}{a+1} + \dfrac{t}{b+1} = 1$ で表される直線であることを示せ．ただし $\boldsymbol{\varphi}_+ \colon \mathbb{R}^2 \to V_+$ は 6/14 の演習問題 1. (2) のもの，(s, t) は $\mathbb{R}^2$ の座標である．

（6/21 の 3 限開始時までに提出してください）

http://math.shinshu-u.ac.jp/~ksakai/19_geometry/19_geometry.html