幾何入門 レポート 8（2019 年 6 月 14 日）コメント

担当：境 圭一

$p_- := (0,0,-1) \in S^2$ とおきます．$\boldsymbol{\varphi}_+^{-1}$ の定義域は $S^2 \setminus \{p_-\}$ でしたが，$p \in H$ ですから，正しくは $\boldsymbol{\varphi}_+^{-1}(S^2 \cap H \setminus \{p_-\})$ を問うべきでした．お詫びして訂正します．

$z = 0$ で定まる $\mathbb{R}^3$ 内の平面を xy 平面と同一視し，$\mathbb{R}^2$ と書いてしまうことにします．この同一視のもと，$(x,y,0) \in \mathbb{R}^3$ と $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ が対応します．
$\dfrac{x}{a+1} + \dfrac{y}{b+1} = 1$ で表される $\mathbb{R}^2$ 内の直線を L とおきます．この直線の式は平面 H の定義式に $z = 0$ を代入したものですから，

$$L = H \cap \mathbb{R}^2 \tag{★}$$

であることがわかります．
$\boldsymbol{u} \neq p_-$ に対し，$\boldsymbol{u}$ と p_- を通る $\mathbb{R}^3$ 内の直線を $R_{\boldsymbol{u}}$ とおきます．

(i) $\boldsymbol{u} \in S^2 \cap H \setminus \{p_-\}$ とします．直線 $R_{\boldsymbol{u}}$ と xy 平面の交点が $\boldsymbol{\varphi}_+^{-1}(\boldsymbol{u})$ でした．$\boldsymbol{u}, p_- \in H$ ですから $R_{\boldsymbol{u}} \subset H$ がわかります．よって xy 平面と $R_{\boldsymbol{u}}$ の交点は $H \cap \mathbb{R}^2 = L$ 上にあることがわかります．

(ii) 逆に $\boldsymbol{a} \in L$ とするとき（この $\boldsymbol{a} = (s,t)$ と $(s,t,0) \in \mathbb{R}^3$ を同一視しています），$R_{\boldsymbol{a}}$ と S^2 の交点が $\boldsymbol{\varphi}_+(\boldsymbol{a})$ でした．$L = \mathbb{R}^2 \cap H$ でしたから $\boldsymbol{a} \in H$ がわかり，$R_{\boldsymbol{a}}$ も H に含まれる直線になります．よって $\boldsymbol{\varphi}_+(\boldsymbol{a}) \in S^2 \cap H \setminus \{p_-\}$, つまり $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{\varphi}_+^{-1}(S^2 \cap H \setminus \{p_-\})$ です．

以上の考察から $\boldsymbol{\varphi}_+^{-1}(S^2 \cap H \setminus \{p_-\}) = L$ です．(i) だけだと $\boldsymbol{\varphi}_+^{-1}(S^2 \cap H \setminus \{p_-\}) \subset L$ しか示していないことになるので不十分です．かなり多くの答案が (i) しか見ていないようです．

$\boldsymbol{\varphi}_+$ と $\boldsymbol{\varphi}_+^{-1}$ の具体的な形は演習で求めたので，それを使うこともできます．例えば $\boldsymbol{u} = (x,y,z) \in S^2 \cap H \setminus \{p_-\}$ とすると $\dfrac{x}{a+1} + \dfrac{y}{b+1} - z = 1 \cdots (*)$ です．$\boldsymbol{\varphi}_+^{-1}(\boldsymbol{u}) = (s,t)$ とおくと $s = \dfrac{x}{1+z}, t = \dfrac{y}{1+z}$ であり

$$\frac{s}{a+1} + \frac{t}{b+1} = \frac{1}{1+z}\Big(\frac{x}{a+1} + \frac{y}{b+1}\Big) \overset{(*)}{=} 1$$

となるので $\boldsymbol{\varphi}_+^{-1}(\boldsymbol{u}) \in L$ であることがわかります．$\boldsymbol{a} \in L$ に対し $\boldsymbol{\varphi}_+(\boldsymbol{a}) \in H$ であることも同様にしてわかります．

以下のような記述がたくさん見られました：

> （誤り）$\boldsymbol{\varphi}_+(s,t) = (x,y,z)$ とすると $\boldsymbol{\varphi}_+^{-1}(S^2 \cap H) = (s,t)$ となる．これを H に代入して，$z = 0$ から $\dfrac{s}{a+1} + \dfrac{t}{b+1} - 0 = 1, \cdots$

最大の問題は，誰かのレポートをそのまま丸写しして上のように書いたと思われるレポートが多数あることです．それだけでも重大な過ちですが，**明らかに誤った記述にも関わらず，疑問を持たずに**（あるいは締切に追われて投げやりになって？）**丸写しして誤った結論に至っている**わけですから，事態はさらに深刻です．**こういうことをしている時間は完全なムダ**です．こういうことをしていても何となく単位を取れて卒業できてしまうかもしれませんが，将来必ず後悔するときが来ます[*1]．今ならまだ軌道修正できます．
上の記述が正しくない点はいろいろあります：

- 「$\boldsymbol{\varphi}_+^{-1}(S^2 \cap H) = (s,t)$」は明らかに変です．左辺は（要素を複数個含む）集合，右辺は 1 点です．
- 「H に代入」というのは意味が通りません．H は平面です．言いたいのは「H の定義式に代入」ということでしょうが，「これを」の意味もわかりませんから，何をしているのか結局わかりません．
- 推測でしかありませんが，上のような記述でやろうとしていることは，おそらく (★) であるように思えます．それは問われている内容ではありません．

[*1] 勉強させるためにもっともらしいことを書いているわけではなく，筆者自身も含めた多くの大人の実体験に基づく事実です

http://math.shinshu-u.ac.jp/~ksakai/19_geometry/19_geometry.html