

$f(x, y, z) = (x - (a - 6))^2 - (y - (b + 1))^2 + (z - 2)^2 - a^2 + b^2 + 2$  ですから, 例えば  $(-6, b + 1 + \sqrt{b^2 + 2}, 2) \in S_f$ , よって  $S_f \neq \emptyset$  です.  $a, b$  の値によっては, 他の点を使ったほうが簡単でしょう.

$\text{grad}(f) = 2(x - (a - 6), -(y - (b + 1)), z - 2)$  ですから,  $\text{grad}(f)(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$  となる  $\mathbf{u}$  は  $(a - 6, b + 1, 2)$  のみです. しかし  $f(a - 6, b + 1, 2) = -a^2 + b^2 + 2$  で, これは  $a, b$  の決め方から 0 にならないはずですから  $(a - 6, b + 1, 2) \notin S_f$  です. 従って  $S_f$  上に  $\text{grad}(f)(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$  となる  $\mathbf{u}$  はありませんから,  $S_f$  は曲面です.

$X = \frac{x - (a - 6)}{\sqrt{|-a^2 + b^2 + 2|}}, Y = \frac{y - (b + 1)}{\sqrt{|-a^2 + b^2 + 2|}}, Z = \frac{z - 2}{\sqrt{|-a^2 + b^2 + 2|}}$  とおくと,  $-a^2 + b^2 + 2$  の正負に応じて,  $S_f$  は  $X^2 - Y^2 + Z^2 = \pm 1$  で表されることがわかります. よって  $g(x, y, z) = x^2 - y^2 + z^2 \mp 1$  とおくと,  $S_f$  は双曲面  $S_g$  上のような 1 次変換  $(x, y, z) \mapsto (X, Y, Z)$  の逆変換を施して得られる曲面であることがわかります.

やることは大体決まっているわけですが, 漫然と書いていてはダメです. 答案をまとめたあと, 書いてあることの意味がきちんと通じているか, 読み返してみるもののほうが大切です. 例えば, 次のような答案は誤りとは言いきれませんが不自然です:

(適切でない)

$\text{grad}(f) = 2(x - (a - 6), -y + (b + 1), z - 2)$  である.

ここで  $\mathbf{u}_0 = (-6, b + 1 + \sqrt{b^2 + 2}, 2)$  とおくと  $f(\mathbf{u}_0) = 0$  だから  $\mathbf{u}_0 \in S_f$ , よって  $S_f \neq \emptyset$ .

$\text{grad}(f)(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$  とすると  $\mathbf{u} = (a - 6, b + 1, 2)$  だが  $f(a - 6, b + 1, 2) \neq 0$  だから,  $S_f$  上  $\text{grad}(f) \neq \mathbf{0}$ .

この答案は, 2 行目を最初に書くべきです. まず  $S_f = \emptyset$  を確認しないと  $S_f$  上の  $\text{grad}(f)$  の値を調べることに意味がない可能性がある, というのが 1 つの理由です. また 1 行目と 3 行目が 1 つの議論のまとまりのはずなのに, 2 行目が割り込んでいてことによって話が分断し, 意味が取りにくくなってしまっています. これでは「意味が通らない」と判断されても仕方なく, せっかく必要な要素は盛り込んだ答案になっているのに不可とされてしまうかもしれません. これ以外にも, 次のような記述は明らかに不適切で, ゆっくり読み返してみれば気づくはずのことです:

- (誤り)  $\text{grad}(f)(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$  とすると  $\mathbf{u} = (a - 6, b + 1, 2)$  だが  $f(a - 6, b + 1, 2) \neq 0$ . よって  $\text{grad}(f) \neq \mathbf{0}$ .  
→  $\text{grad}(f)(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$  となる  $\mathbf{u}$  を求めているのだから, おかしいと思うべきです. 正しくは「 $S_f$  上  $\text{grad}(f) \neq \mathbf{0}$ 」です.
- (誤り)  $\text{grad}(f)(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$  とすると  $\mathbf{u} = (a - 6, b + 1, 2)$  だが  $f(a - 6, b + 1, 2) = -a^2 + b^2 + 2 \notin S_f$ .  
→ 実数が  $\mathbb{R}^3$  の部分集合  $S_f$  に含まれる・含まれないを論ずるのは変です.
- (誤り)  $f(a - 6, b + 1, 2) \neq 0$  だから  $(a - 6, b + 1, 2) \in S_f$   
→ もちろん「 $(a - 6, b + 1, 2) \notin S_f$ 」の誤りです.
- (誤り)  $\forall \mathbf{u} \neq (a - 6, b + 1, 2)$  なら  $f$  上  $S_f$  は曲面  
→ 意味が通らない文章です. 断片的な記憶で書いていると思われます.
- (不適切)  $\mathbf{u} = (a - 6, b + 1, 2)$  のとき  $\text{grad}(f)(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$   
→ 他の点について何も言っていないこととなります.