幾何入門 演習問題 10（2019 年 6 月 28 日）

担当：境 圭一

1. $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ を $f(x,y,z) := x^2 - y^2 - z$ で定義し，$S_f := f^{-1}(0)$ とおく．

(1) $S_f \neq \emptyset$ であることと，任意の $\boldsymbol{u} \in S_f$ に対し $\mathrm{grad}(f)(\boldsymbol{u}) \neq \boldsymbol{0}$ であることを示せ．従って S_f は曲面である．

(2) $\boldsymbol{u} = (a,b,c) \in S_f$ に対し，$T_{\boldsymbol{u}}S_f$ を表す方程式を求めよ．また $T_{\boldsymbol{u}}^{\perp}S_f$ の基底を 1 つ求めよ．

(3) $\boldsymbol{u} \in S_f$ における接平面が $\boldsymbol{n} = (3,2,1)$ と直交するとき，$\boldsymbol{u}$ を求めよ．

(4) S_f の概形を図示せよ．

(5) 上の (1), (2), (4) と同様のことを以下の関数について考えよ．(3) についても $\boldsymbol{n}$ を適当に設定し考えてみよ．

(i) $f(x,y,z) := y^2 + (z-1)^2 - 2$　(ii) $f(x,y,z) := x - 2y + 3z - 4$　(iii) $f(x,y,z) := \dfrac{x^2}{4} + y^2 + \dfrac{z^2}{9} - 1$

(iv) $f(x,y,z) := xy + z^2 + 1$　(v) $f(x,y,z) := x^2 - y^2 - z^2 + 1$　(vi) $f(x,y,z) := x^3 - y^3 - z^3 + 1$

2. $S^2 := \{\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^3 \mid |\boldsymbol{u}| = 1\}$ とする．$V_z^+ := \{(x,y,z) \in S^2 \mid z > 0\}$ とし，$\boldsymbol{u} \in V_z^+$ の近くの局所座標 $\boldsymbol{\varphi}\colon D^\circ \to V_z^+$ を次のように取る：$D^\circ := \{(s,t) \in \mathbb{R}^2 \mid s^2 + t^2 < 1\}$,　$\boldsymbol{\varphi}(s,t) := (s, t, \sqrt{1 - s^2 - t^2})$.

(1) $\partial_s \boldsymbol{\varphi} := \dfrac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial s}$ などと略記する．$\partial_s \boldsymbol{\varphi}, \partial_t \boldsymbol{\varphi}$ を計算せよ．

(2) $\boldsymbol{u} = (a,b,c) \in V_z^+$ とする．$\boldsymbol{\varphi}(s,t) = \boldsymbol{u}$ となる $(s,t) \in D^\circ$ を求めよ．

(3) (1), (2) を使って，$T_{\boldsymbol{u}}S^2$ を表す方程式を求めよ．また, $T_{\boldsymbol{u}}^{\perp}S^2$ の基底を 1 つ求めよ．

(4) $\boldsymbol{n}\colon V_z^+ \to \mathbb{R}^3$ を，$\boldsymbol{u} \in V_z^+$ に対し，$\boldsymbol{\varphi}(s,t) = \boldsymbol{u}$ となる $(s,t) \in D^\circ$ を選んで $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{u}) := \dfrac{(\partial_s \boldsymbol{\varphi} \times \partial_t \boldsymbol{\varphi})(s,t)}{|(\partial_s \boldsymbol{\varphi} \times \partial_t \boldsymbol{\varphi})(s,t)|}$ で定義する．$\boldsymbol{n}(\boldsymbol{u}) \in T_{\boldsymbol{u}}^{\perp}S^2$ を示せ．また $\boldsymbol{\psi}\colon D^\circ \to V_z^+$ を $\boldsymbol{\psi}(s,t) := (t, s, \sqrt{1 - s^2 - t^2})$ で定義し，$\widetilde{\boldsymbol{n}}\colon V_z^+ \to \mathbb{R}^3$ を，$\boldsymbol{n}$ の定義中の $\boldsymbol{\varphi}$ を $\boldsymbol{\psi}$ で置き換えることにより定義する．$\widetilde{\boldsymbol{n}}$ は $\boldsymbol{n}$ と逆の向きを定める，即ち $\widetilde{\boldsymbol{n}} = -\boldsymbol{n}$ が成り立つことを示せ．

3. 円柱座標 (r,θ,z) で $\{(r,\theta,z) \mid (r-2)^2 + z^2 = 1\}$ で表されるトーラスを T とおく．$\boldsymbol{\varphi}\colon U := (0,2\pi) \times (0,2\pi) \to \mathbb{R}^3$ を，$\mathbb{R}^3$ の xyz 座標で $\boldsymbol{\varphi}(\alpha,\beta) := ((2+\cos\alpha)\cos\beta,\ (2+\cos\alpha)\sin\beta,\ \sin\alpha)$ で定義する．

(1) $\boldsymbol{\varphi}(U) \subset \mathrm{T}$ であることを示せ．また $\boldsymbol{\varphi}$ は単射であること，$D\boldsymbol{\varphi}$ は常に階数 2 であることを示せ．

(2) $\boldsymbol{u} = (a,b,c) \in \varphi(U)$ に対し，$T_{\boldsymbol{u}}\mathrm{T}$ と $T_{\boldsymbol{u}}^{\perp}\mathrm{T}$ をそれぞれ求めよ．

(3) $f(x,y,z) := (x^2 + y^2 + z^2 + 3)^3 - 16(x^2 + y^2)$ に対し $\mathrm{T} = f^{-1}(0)$ であること（6/22 の講義，演習を参照のこと）を用いて，$\boldsymbol{u} \in \mathrm{T}$ に対し $T_{\boldsymbol{u}}\mathrm{T}$ と $T_{\boldsymbol{u}}^{\perp}\mathrm{T}$ をそれぞれ求めよ．

4. $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ を開集合とし，$f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ を C^∞ 級関数とする．f のグラフは向き付け可能な曲面であることを示せ．

5. $\boldsymbol{\varphi}\colon (-1,1) \times [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$ を $\boldsymbol{\varphi}(t,\theta) := ((2 + t\cos(\theta/2))\cos\theta,\ (2 + t\cos(\theta/2))\sin\theta,\ t\sin(\theta/2))$ で定義し，その像を $M := \boldsymbol{\varphi}((-1,1) \times [0,2\pi])$ とおく．

(1) M を図示し，M はメビウスの帯であることを確かめよ．

(2) $U := (-1,1) \times (0,2\pi)$ に対し，$\boldsymbol{\varphi}\colon U \to M$ は単射で，$D\boldsymbol{\varphi}$ の階数は常に 2 であることを示せ．

(3) $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{\varphi}(t,\theta)$ ($(t,\theta) \in U$) に対し $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{u}) \in T_{\boldsymbol{u}}^{\perp}M$ を問題 2 (4) と同様に定める．$\displaystyle\lim_{\theta \searrow 0} \boldsymbol{n}(\boldsymbol{\varphi}(0,\theta))$ と $\displaystyle\lim_{\theta \nearrow 2\pi} \boldsymbol{n}(\boldsymbol{\varphi}(0,\theta))$ を比べ，M は向き付け可能ではないことを示せ．

（提出の必要はありません）

補足． 曲面 S 上の点 $\boldsymbol{u}$ における接平面 $T_{\boldsymbol{u}}S$ は $\mathbb{R}^3$ 内の 2 次元部分ベクトル空間で，特に $\boldsymbol{0} \in \mathbb{R}^3$ を必ず通ります．気持ちとしては，$\boldsymbol{0} \in \mathbb{R}^3$ が $\boldsymbol{u}$ にうつるような平行移動 $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{x} + \boldsymbol{u}$ により $T_{\boldsymbol{u}}S$ を平行移動して得られる平面 H（これは $\boldsymbol{u}$ を通る）を接平面とよびたいのですが，これはベクトル空間になりません．パラメータ $\boldsymbol{l}$ で表される正則曲線 L の場合は，$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{l}(t)$ を通り $\boldsymbol{w} := \dfrac{d\boldsymbol{l}}{dt}(t)$ に平行な直線を $\boldsymbol{u}$ における接線とよびました．これは上の話の H に対応します．話に整合性を持たせるためには，$\boldsymbol{w}$ を基底とする 1 次元部分ベクトル空間 $T_{\boldsymbol{u}}L := \langle \boldsymbol{w} \rangle = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \boldsymbol{x} = k\boldsymbol{w}, \exists k \in \mathbb{R}\}$ を「接線」とよぶべきだったかもしれません．

曲面 S 上に連続な単位法ベクトル場 $\boldsymbol{n}\colon S \to \mathbb{R}^3$ を取れるとき，S は向き付け可能であるといいます．気持ちとしては，$\boldsymbol{n}$ が向くほうを「表」，その反対側を「裏」とよぶことにして，曲面に表裏の区別を矛盾なく定めることができる，ということです．問題 5 の Möbius の帯は向き付け不可能な（表裏の区別ができない）曲面の例です．

http://math.shinshu-u.ac.jp/~ksakai/19_geometry/19_geometry.html

幾何入門 レポート問題 10（2019 年 6 月 28 日）

担当：境 圭一

各自の学籍番号の下 2 桁の数を $10a+b$ $(a, b \in \mathbb{Z},\ 0 \leq a, b \leq 9)$ と表す．例えば 18S1076α なら $(a, b) = (7, 6)$.
$f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 - 1$ に対し，$S := f^{-1}(0)$ は曲面である（証明不要）．$\boldsymbol{u} = (p, q, r) \in S$ における接平面 $T_{\boldsymbol{u}}S$ が $\boldsymbol{n} := (6-a,\ 10-b,\ b-a-4)$ と直交するとき，p, q, r を求めよ．

（7/5 の 3 限開始時までに提出してください）

http://math.shinshu-u.ac.jp/~ksakai/19_geometry/19_geometry.html