幾何入門 レポート 10（2019 年 6 月 28 日）コメント

担当：境 圭一

先に $S = f^{-1}(0)$ が曲面であるとわかっていたとしても，S 上 $\mathrm{grad}(f) \neq \mathbf{0}$ とは限りません（演習問題 9 の問題 1 (6) がその例です）．同じことの言い換えですが，講義でやった定理 7.6 の逆は不成立です．今の場合，たまたま

$$S = f^{-1}(0) \text{ 上 } \mathrm{grad}(f) \neq \mathbf{0} \tag{$*$}$$

となっているので，$\mathrm{grad}(f)(\boldsymbol{u})$ を $T_{\boldsymbol{u}}^{\perp}S$ の基底に選ぶことができる，ということが何らかの形で書かれているべきですが，今回の f については講義で $(*)$ を見てあるので良しとしました．
なお $\mathrm{grad}(f)(\boldsymbol{u}) = {}^t(2p, 2q, -2r)$ ですが，これを 2 で割った ${}^t(p, q, -r)$ を $T_{\boldsymbol{u}}^{\perp}S_f$ の基底に選ぶことができます．そのほうが計算ミスのリスクは減りそうに思えます．

まず $(p, q, r) \in S_f$ から

$$p^2 + q^2 - r^2 = 1 \tag{i}$$

です．また $\boldsymbol{n}, (p, q, r) \in T_{\boldsymbol{u}}^{\perp}S$ で，これらは $\mathbf{0}$ でないので

$$(p, q, -r) = k\boldsymbol{n} \tag{ii}$$

をみたす $k \in \mathbb{R}, k \neq 0$ が存在します．(ii) から

$$(p, q, r) = k(6 - a,\ 10 - b,\ a - b + 4) \tag{iii}$$

で，(i) に代入すれば $2k^2(6 - a)(10 - b) = 1$, つまり $k = \pm 1/\sqrt{2(6 - a)(10 - b)}$ を得ます（a, b の定め方から，根号の中身は 0 より大きいはずです）．(iii) に代入すれば

$$(p, q, r) = \pm \frac{(6 - a,\ 10 - b,\ a - b + 4)}{\sqrt{2(6 - a)(10 - b)}}$$

です．

気持ちとしては $\boldsymbol{n}$ が $T_{\boldsymbol{u}}^{\perp}S$ の基底の定数倍だと書きたいので，条件 (ii) を $\boldsymbol{n} = l \cdot \mathrm{grad}(f)(\boldsymbol{u})$ と書きたいのですが，これをそのまま (i) に代入するには「l で割る」という操作が必要になります．0 で割ってはいけないわけですから，「文字で割る」という操作については細心の注意を払い，可能ならば回避すべきです．この問題の場合，$\boldsymbol{n} \neq \mathbf{0}$ であることから $l = 0$ はありえないので，l で割ることに何の問題もありません．あるいは (i) を $(lp)^2 + (lq)^2 - (lr)^2 = l^2$ の形に書いておけば，$lp = (6 - a)/2$ などを代入して l を求められます．これなら l で割る必要はありません．何人かはこのように書いていて上手だと思いましたので紹介しました．