幾何入門 演習問題 11（2019 年 7 月 5 日）

担当：境 圭一

1. $S^2 := \{\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^3 \mid |\boldsymbol{u}| = 1\}$ の向きを $\boldsymbol{n}\colon S^2 \to \mathbb{R}^3, \boldsymbol{n}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u}$ で与える（例 8.10 参照）．$D^\circ := \{(s,t) \in \mathbb{R}^2 \mid s^2 + t^2 < 1\}$ とおき，各 $\boldsymbol{u} \in V_z^+ := \{(x,y,z) \in S^2 \mid z > 0\}$ のまわりの局所座標 $\boldsymbol{\varphi}\colon D^\circ \to V_z^+, \boldsymbol{\varphi}(s,t) := (s, t, \sqrt{1-s^2-t^2})$ を考える（例 7.3 参照）．
   (1) $\partial_s\boldsymbol{\varphi} := \dfrac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial s}$ などと略記する．$\hat{\boldsymbol{n}} := \partial_s\boldsymbol{\varphi} \times \partial_t\boldsymbol{\varphi}$ を計算し，$\boldsymbol{\varphi}$ は $\boldsymbol{n}$ に適合することを示せ．つまり，任意の $\boldsymbol{a} \in D^\circ$ に対し $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{a})$ とおくと，$\hat{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{a}) = k\boldsymbol{n}(\boldsymbol{u})$ となる $k > 0$ が存在することを示せ．
   (2) $\mathbb{R}^3$ 上のベクトル場 $\boldsymbol{V}(x,y,z) := (x,y,z)$ に対し，$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{\varphi}(s,t))$ を求めよ．また $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{\varphi}(s,t)) \cdot \hat{\boldsymbol{n}}(s,t)$ を求めよ．
   (3) $\boldsymbol{\varphi}(D^\circ) = V_z^+$ であることを示せ．
   (4) $\displaystyle\int_{V_z^+} \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n}\, d\boldsymbol{S} := \int_{D^\circ} \boldsymbol{V}(\boldsymbol{\varphi}(s,t)) \cdot \hat{\boldsymbol{n}}(s,t)\, dsdt$ を計算せよ．
   (5) $\boldsymbol{\varphi}'\colon D^\circ \to V_z^+$ を，$\boldsymbol{\varphi}'(s,t) := (t, s, \sqrt{1-s^2-t^2})$ で定義する．$\boldsymbol{\varphi}'$ は $\boldsymbol{n}$ に適合しないことを示せ．
   (6) $\hat{\boldsymbol{n}}' := \partial_s\boldsymbol{\varphi}' \times \partial_t\boldsymbol{\varphi}'$ とおく．$\displaystyle\int_{D^\circ} \boldsymbol{V}(\boldsymbol{\varphi}'(s,t)) \cdot \hat{\boldsymbol{n}}'(s,t)\, dsdt$ を計算し (4) と比較せよ．
   (7) 各 $\boldsymbol{u} \in V_x^+ := \{(x,y,z) \in S^2 \mid x > 0\}$ のまわりの局所座標 $\overline{\boldsymbol{\varphi}}\colon D^\circ \to V_x^+, \overline{\boldsymbol{\varphi}}(s,t) := (\sqrt{1-s^2-t^2}, s, t)$ を考える．$W := \boldsymbol{\varphi}^{-1}(V_z^+ \cap V_x^+), W' := \overline{\boldsymbol{\varphi}}^{-1}(V_z^+ \cap V_x^+)$ とおくとき，$\boldsymbol{\psi} := \overline{\boldsymbol{\varphi}}^{-1} \circ \boldsymbol{\varphi}\colon W \to W'$ を計算し, $\boldsymbol{\psi}$ が C^∞ 級全単射で，$\boldsymbol{\psi}^{-1}$ も C^∞ 級であることを示せ．
2. S^2 の向き $\boldsymbol{n}\colon S^2 \to \mathbb{R}^3$ は問題 1 と同じとする．$V_+ := \{(x,y,z) \in S^2 \mid z > -1\}$ とおき，各 $\boldsymbol{u} \in V_+$ のまわりの局所座標 $\boldsymbol{\varphi}_+\colon \mathbb{R}^2 \to V_+$ として $\boldsymbol{\varphi}_+(s,t) := \dfrac{(2s,\ 2t,\ 1-s^2-t^2)}{1+s^2+t^2}$ を考える（演習 8, 問題 1 の立体射影）．
   (1) $\boldsymbol{\varphi}_+$ は $\boldsymbol{n}$ に適合することを示せ．
   (2) ベクトル場 $\boldsymbol{V}(x,y,z) := (x,y,z)$ に対し，$\displaystyle\int_{V_+} \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n}\, d\boldsymbol{S}$ を計算せよ．
   (3) $\boldsymbol{\varphi}_+(D^\circ) = V_z^+$ （問題 1 のもの）を示せ．$\boldsymbol{\varphi}_+\colon D^\circ \to V_z^+$ を使って $\displaystyle\int_{V_z^+} \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n}\, d\boldsymbol{S}$ を計算し，1. (4) と比較せよ．
   (4) 各 $\boldsymbol{u} \in V_- := \{(x,y,z) \in S^2 \mid z < 1\}$ のまわりの局所座標 $\boldsymbol{\varphi}_-\colon \mathbb{R}^2 \to V_-$ として $\boldsymbol{\varphi}_-(s,t) := \dfrac{(2s,\ 2t,\ s^2+t^2-1)}{1+s^2+t^2}$ を考える（演習 8, 問題 1 の立体射影）．$W_\pm := \boldsymbol{\varphi}_\pm^{-1}(V_+ \cap V_-)$ とおくとき，$\boldsymbol{\psi} := \boldsymbol{\varphi}_-^{-1} \circ \boldsymbol{\varphi}_+\colon W_+ \to W_-$ を計算し，$\boldsymbol{\psi}$ が C^∞ 級全単射で，$\boldsymbol{\psi}^{-1}$ も C^∞ 級であることを示せ．
3. 一般に，$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3$ と $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ に対し，$(a\boldsymbol{u} + b\boldsymbol{v}) \times (c\boldsymbol{u} + d\boldsymbol{v}) = (ad - bc)\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$ であることを示せ．これを使って補題 9.6 の証明を完成させよ．
4. C^∞ 級関数 $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ を**スカラー場**とも呼ぶ．向きづけられた曲面 S に対し，$\boldsymbol{u} \in S$ のまわりの $\boldsymbol{n}$ に適合する局所座標 $\boldsymbol{\varphi}\colon U \to S$ を取って，スカラー場 f の $A := \boldsymbol{\varphi}(U)$ に沿った**面積分**を次のように定義する：

$$\int_A f\, dS := \int_U f(\boldsymbol{\varphi}(s,t))\, |\hat{\boldsymbol{n}}(s,t)|\, dsdt, \quad \text{ただし} \quad \hat{\boldsymbol{n}} := \partial_s\boldsymbol{\varphi} \times \partial_t\boldsymbol{\varphi}.$$

   (1) $\displaystyle\int_A f\, dS$ は $\boldsymbol{n}$ に適合する局所座標 $\boldsymbol{\varphi}$ の取り方によらないことを示せ．
   (2) 定数関数 1 に対し，$\displaystyle\int_A 1\, dS$ を A の**面積**と呼ぶ．問題 2 の $\boldsymbol{\psi}\colon \mathbb{R}^2 \to V_+$ に対し，$\displaystyle\int_{V_+} 1\, dS$ を計算せよ．
5. トーラス T の局所座標として，演習 10, 問題 3 の $\boldsymbol{\varphi}\colon (0, 2\pi) \times (0, 2\pi) \to T$ を取る．
   (1) S の向き $\boldsymbol{n}\colon T \to \mathbb{R}^3$ を，$\boldsymbol{n}$ が T で囲まれる有界領域から非有界領域に向かうよう定義する．$\boldsymbol{\varphi}$ は $\boldsymbol{n}$ に適合するか？（ヒント：例えば $\boldsymbol{\varphi}(\pi, \pi)$ における $\boldsymbol{n}$ の向きを見れば十分）
   (2) $\boldsymbol{V}(x,y,z) := (y, -x, z)$ に対し，$\displaystyle\int_{\boldsymbol{\varphi}(U)} \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n}\, d\boldsymbol{S}$ を計算せよ．
   (3) $\boldsymbol{\varphi}(U)$ の面積（問題 4 参照）を計算せよ．

（提出の必要はありません）

補足：局所座標が曲面の向きに適合するか否かの判定について．

$(S, \boldsymbol{n})$ を向きづけられた曲面とし，$\boldsymbol{\varphi}\colon U \to S$ を $\boldsymbol{u} \in S$ のまわりの局所座標とします．$\hat{\boldsymbol{n}} := \partial_s\boldsymbol{\varphi} \times \partial_t\boldsymbol{\varphi}\colon U \to \mathbb{R}^3$ とお

くと，任意の $\boldsymbol{a} \in U$ に対し

$$\hat{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{a}) = k\boldsymbol{n}(\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{a})) \quad (\in T^{\perp}_{\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{a})}S) \tag{$*$}$$

となる $k \neq 0$ が存在します（実際には常に $|\boldsymbol{n}| = 1$ であることから $k = \pm|\hat{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{a})|$ で，これは $\boldsymbol{a}$ に依存して変化します）．$k \neq 0$ となる理由は，局所座標の条件 (iii) により $\partial_s\boldsymbol{\varphi}$ と $\partial_t\boldsymbol{\varphi}$ が常に 1 次独立で，従って $\hat{\boldsymbol{n}} \neq \boldsymbol{0}$ だからです．**任意の** $\boldsymbol{a} \in U$ に対し $k > 0$ であるとき，$\boldsymbol{\varphi}$ は $\boldsymbol{n}$ に**適合する**，といいました．$\hat{\boldsymbol{n}}$ を「$\boldsymbol{\varphi}$ が決める $\boldsymbol{\varphi}(U)$ 上の向き」と呼ぶことにすると，元々与えられた向き $\boldsymbol{n}$ と，$\boldsymbol{\varphi}$ が決める $\boldsymbol{\varphi}(U)$ 上の向き $\hat{\boldsymbol{n}}$ が同じ方向を向くとき，$\boldsymbol{\varphi}$ は $\boldsymbol{n}$ に適合する，というわけです．

$\boldsymbol{\varphi}$ が $\boldsymbol{n}$ に適合するか否か調べるには，**任意の** $\boldsymbol{a} \in U$ について，$(*)$ をみたす k の符号を調べる必要があります．しかし実際には次のことが言えます：

補題． U が弧状連結であるとき，**ある 1 つの** $\boldsymbol{a} \in U$ について $(*)$ をみたす k が正なら，$\boldsymbol{\varphi}$ は $\boldsymbol{n}$ に適合する．

証明． $\boldsymbol{a}' \in U$ とします．U が弧状連結なので，U 内の連続な曲線 $\boldsymbol{l}\colon [0,1] \to U$ で，$\boldsymbol{l}(0) = \boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{l}(1) = \boldsymbol{a}'$ をみたすものが存在します．$k = \pm|\hat{\boldsymbol{n}}|$ も U 上の連続関数なので，$k \circ \boldsymbol{l} = \pm|\hat{\boldsymbol{n}} \circ \boldsymbol{l}|$ も連続です．k がどの点でも 0 にならないことから，$k \circ \boldsymbol{l}$ の正負は $[0,1]$ 全体で一定です（連続関数が符号を変える瞬間には必ず 0 を通る）．仮定から $t = 0$ においては $k(\boldsymbol{l}(0)) = k(\boldsymbol{a}) = +|\hat{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{a})| = +|\hat{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{l}(0))| > 0$ でしたから，$t = 1$ においても $k(\boldsymbol{l}(1)) = +|\hat{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{l}(1))| > 0$ です．これは $k(\boldsymbol{a}') = +|\hat{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{a}')| > 0$ を意味します． □

$k(\boldsymbol{a})$ の符号を調べるとき，$\boldsymbol{a}$ はどれでもよいわけですが，計算しやすいものを選ぶとよいと思います．例えば演習 11 の問題 1. (1) の場合，$\hat{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{0})$ と $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{0}))$ を比べると簡単です．

幾何入門 レポート問題 11（2019 年 7 月 5 日）

担当：境 圭一

演習 11, 問題 1 の状況で，$\boldsymbol{W}(x, y, z) := (xz^2, yz^2, z^3)$ に対し，$\displaystyle\int_{V_z^+} \boldsymbol{W} \cdot \boldsymbol{n}\, d\boldsymbol{S}$ を計算せよ.

（7/12 の 3 限開始時までに提出してください）

http://math.shinshu-u.ac.jp/~ksakai/19_geometry/19_geometry.html