幾何入門 レポート 11（2019 年 7 月 5 日）コメント

担当：境 圭一

演習 11. 1 を踏まえれば単に積分の計算問題で，演習 11. 1 より簡単な計算のはずです．積分を計算するときは向きが大切なので，$\boldsymbol{\varphi}$ が $\boldsymbol{n}$ に適合していることは押さえておいた方がいいと思います．向きを誤ると答の符号が逆になってしまいますから注意が必要です．与えられた局所座標が向きに適合すると思い込んではいけません．今回の問題については講義中にやってあるので省略可としました．

この問題については，実際に計算するにあたっては極座標が便利です．$\psi\colon (r,\theta) \mapsto (x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ という変換の Jacobi 行列は

$$\begin{pmatrix} \partial x/\partial r & \partial x/\partial\theta \\ \partial y/\partial r & \partial y/\partial\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$$

ですから，その行列式の絶対値である r が積分の変数変換のときに現れます：

$$dxdy = r\,drd\theta.$$

$r\theta$ 平面上の小さい正方形 $A = \{(r,\theta) \mid r_0 \le r \le r_0 + \epsilon,\ \theta_0 \le \theta \le \theta_0 + \epsilon\}$ の面積と，これを ψ で xy 平面にうつした像 $\psi(A)$ のおおよその面積比が r です．A が十分小さい正方形なら，ψ の 1 次近似である $D\psi$ でうつしても像はほとんど変わらず，そのとき面積は $\det D\psi$ 倍される，というのがだいたいの理由です．

(7/12)

http://math.shinshu-u.ac.jp/~ksakai/19_geometry/19_geometry.html