

以下, $S^2 := \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3 \mid |\mathbf{u}| = 1\}$ の向きは $\mathbf{n}: S^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\mathbf{n}(\mathbf{u}) = \mathbf{u}$ で与える.

- $\mathbf{V}(x, y, z) := (x^2 + 3xy^2, -y^3 + y(2-z), \frac{z^2}{2} - 2zx)$ に対し, Gauss の発散定理を用いて $\int_{S^2} \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS$ を計算せよ.
- (教科書の例題 2.29 参照) $E := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x/2)^2 + (y/3)^2 + (z/4)^2 = 1\}$ とする.
 - E を図示せよ.
 - E が囲む有界領域を Ω とし, E の向き $\mathbf{n}: E \rightarrow \mathbb{R}^3$ を, Ω の内側から外側に向かう法ベクトルで与える. \mathbf{n} を求めよ. (ヒント: 補題 8.5 を使う. 一般に $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ のとき $\frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|}$ は単位ベクトルである. 符号を決めるには, 例えば $\mathbf{n}(2, 0, 0) = (1, 0, 0)$ であるべきことに注意するとよい)
 - $r := \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ とおき, $\mathbb{R}^3 - \{\mathbf{0}\}$ 上のベクトル場 $\mathbf{V}(x, y, z) := \frac{(x, y, z)}{r^3}$ を考える. $\operatorname{div} \mathbf{V}$ を計算せよ.
 - $S^2 \subset \Omega$ であることを示せ. E と S^2 で囲まれた有界領域 Ω' に対し Gauss の発散定理を使って, $\int_E \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS$ を S^2 上の面積分を使って表わせ. (S^2 の向きに注意せよ)
 - S^2 上 $r = 1$ であることを使って, $\int_E \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS$ を計算せよ.
 - $E_{\pm} := \{(x, y, z) \in E \mid \pm z > 0\}$ とおき, E_{\pm} 上の各点のまわりの局所座標を, $\varphi_{\pm}: D^{\circ} := \{(s, t) \in \mathbb{R}^2 \mid s^2 + t^2 < 1\} \rightarrow E_{\pm}$, $\varphi_{\pm}(s, t) := (2s, 3t, \pm 4\sqrt{1-s^2-t^2})$ で定義する. これらが \mathbf{n} に適合するか調べ, これらを使って $\int_E \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS$ の計算を試みよ.
- $S \subset \mathbb{R}^3$ は閉曲面で, S が囲む有界領域 Ω は原点を内部に含むとする. S の向きは, Ω の内側から外側に向かう法ベクトルで与えられるとする. このとき, 問題 2 のベクトル場 \mathbf{V} に対し, $\int_S \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS$ を計算せよ.
- (1) C^{∞} 級関数 $f, g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ に対し, 次の等式 (a), (b) を示せ. (演習問題 7, 問題 1 参照)
 - $\operatorname{div}(\operatorname{grad}(f)) = \Delta f$, ただし $\Delta f := \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2}$
 - $\operatorname{div}(g \cdot \operatorname{grad}(f)) = \operatorname{grad}(f) \cdot \operatorname{grad}(g) + g \Delta f$
- 講義の定理 9.15 (Gauss の発散定理) の状況で, 次の Green の公式を示せ: f, g を $\bar{\Omega}$ を含む領域上定義された C^{∞} 級関数とするとき

$$\sum_{i=1}^k \int_{S_i} (g \cdot \operatorname{grad}(f) - f \cdot \operatorname{grad}(g)) \cdot \mathbf{n} dS = \int_{\Omega} (g \Delta f - f \Delta g) dx dy dz$$

- (1) $\mathbf{V}(x, y, z) := (x, y, z)$ に対し, Gauss の発散定理を使って $\int_{S^2} \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS$ を計算せよ.
 - $\psi(s, t) := \frac{(2s, 2t, -1 + s^2 + t^2)}{1 + s^2 + t^2}$ で与えられる S^2 の局所座標 $\psi: \mathbb{R}^2 \rightarrow S^2$ (立体射影) が向き $\mathbf{n}(\mathbf{u}) = \mathbf{u}$ に適合することを示せ. $\int_{\psi(\mathbb{R}^2)} \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS$ を計算し (1) と比較せよ. S^2 上で, $\psi(\mathbb{R}^2)$ で覆われない部分はどこか?
- 講義の例 9.12 の方法で $\int_{S^2} \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS$ が計算される理由を考えよう.
 - $0 < \epsilon < 1$ とする. $U_{\epsilon} := \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2 \mid 1 - \epsilon < |\mathbf{u}| < 1 + \epsilon\}$ を図示せよ.
 - $\varphi_{\epsilon}: U_{\epsilon} \rightarrow \mathbb{R}^3$ を, $(r \cos \theta, r \sin \theta) \in U_{\epsilon}$ に対し

$$\varphi_{\epsilon}(r \cos \theta, r \sin \theta) := (\cos(1-r) \cos \theta, \cos(1-r) \sin \theta, \sin(1-r))$$

で定める. φ_{ϵ} は向きに適合する S^2 の局所座標で, $\varphi_{\epsilon}(U_{\epsilon})$ は「赤道」 $\{(x, y, 0) \in S^2\}$ を覆うことを示せ.

- $\lim_{\epsilon \downarrow 0} \int_{\varphi_{\epsilon}(U_{\epsilon})} \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS \rightarrow 0$ を示せ. “ $\lim_{\epsilon \downarrow 0} \varphi_{\epsilon}(U_{\epsilon})$ ” はどのような集合か考えよ.
- $V_{\pm} := \{(x, y, z) \in S^2 \mid z \neq \mp 1\}$ とおく. V_{\pm} は曲面だが閉曲面ではないことを示せ. ヒント: S^2 が曲面であることを使うと V_{\pm} も曲面であることを示せる. $(0, 0, \mp 1) \in \mathbb{R}^3 \setminus V_{\pm}$ が内点でないことを示せば, V_{\pm} が閉集合でないことが示される.

補足 1. : 線積分 (その 2) と面積分について. 曲面が曲線と異なる点は, 単独の局所座標 (パラメータ) で全体を覆えないことです. そのため, $\int_S \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS$ を計算するには, 講義の定理 9.9 のように S を複数の局所座標で覆い, それぞれの上での積分値を足し合わせます.

その点を除けば, 線積分 (その 2) と面積分はほとんど同じことをやっていることに気づくと思います. これらは

- 「積分領域」である \mathbb{R}^2 内の曲線 (1 次元の図形) や \mathbb{R}^3 内の曲面 (2 次元の図形) の直交補空間の方向 (法線の方向) がちょうど 1 次元であることを使って定義される

という点で共通のもので, これらの積分に現れる法線ベクトル $\hat{\mathbf{n}}$ は

- 線積分 (その 2) の場合は, 曲線の向きを表すパラメータ \mathbf{l} の速度ベクトル (微分) から定まり,
- 面積分の場合も, 曲面の向きに適合するパラメータ φ の偏微分を使って定まります.

この 2 つの積分は, 本当は「法線成分の積分」とでも呼んで一括りに扱うべきものです.

もっと言う, \mathbb{R}^n 内の「 $n-1$ 次元の図形」に対しても, ベクトル場 $\mathbf{V}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ の「法線成分の積分」が同様に定義され, Gauss の発散定理が成立することが想像されるでしょう. このあたりは多様体論の一部として学ぶのが効率的です. この講義で 3 次元以下に話を絞ったのは, 目に見えるので理解しやすそうだから, という程度の理由です.

これに対し, 線積分 (その 1) は, 「積分領域」である曲線の接線方向がちょうど 1 次元であること, つまり曲線が 1 次元の図形であることを使って定義されていて, 曲線が入っている \mathbb{R}^n の次元 n は定義にさほど影響しません. こちらを「線積分」と呼ぶのは理に合っています. 「接線成分の積分」とも呼べるかもしれません.

補足 2. : 教科書の例題 2.29 について. 「ところで $\int_{S_1} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{S}$ は $\mathbf{V} = (x, y, z)$ が S_1 上成立するから, 定義にしたがって直接計算できる」のところについて補足します.

7/12 の演習問題 12-2 も同様の問題ですので, こちらを使って説明します. (4) までやると, $\int_E \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS = \int_{S^2} \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS$ であることがわかります. ただし $S^2 := \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3 \mid |\mathbf{u}| = 1\}$ の向きは, S^2 が囲む有界領域 $D^3 := \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3 \mid |\mathbf{u}| \leq 1\}$ の内側から外側に向かう法線ベクトルで与えています. \mathbf{V} は $\mathbf{0} \in D^3$ で定義されない, Gauss の発散定理を使えないことに注意しておきます.

$\int_{S^2} \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS$ は次のように定義されました: 何枚かの局所座標 $\varphi_i: U_i \rightarrow S^2$ ($i = 1, 2, \dots$) で, $\bar{V}_i \subset U_i$ となるような $V_i \subset U_i$ が存在し $\cup_i \varphi_i(\bar{V}_i) = S^2$ をみたすものを選んで

$$\int_{S^2} \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS = \sum_i \int_{\bar{V}_i} \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS. \quad (*)$$

(*) の左辺は φ_i を使って

$$\int_{\bar{V}_i} \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS = \int_{\bar{V}_i} \mathbf{V}(\varphi_i(s, t)) \cdot \hat{\mathbf{n}}_i(s, t) ds dt \quad (**)$$

と定義されます. ただし $\hat{\mathbf{n}}_i := \partial_s \varphi_i \times \partial_t \varphi_i$ です.

$\mathbf{W}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ を $\mathbf{W}(x, y, z) := (x, y, z)$ で定義しましょう. これはもちろん $\mathbf{V}(x, y, z) := \frac{(x, y, z)}{|(x, y, z)|^{3/2}}$ とは異なりますが, $(x, y, z) \in S^2$ なら $\mathbf{V}(x, y, z) = \mathbf{W}(x, y, z)$ です. $\varphi_i(s, t) \in S^2$ であることから $\mathbf{V}(\varphi_i(s, t)) = \mathbf{W}(\varphi_i(s, t))$ となるので

$$(**) = \int_{\bar{V}_i} \mathbf{W}(\varphi_i(s, t)) \cdot \hat{\mathbf{n}}_i(s, t) ds dt = \int_{\bar{V}_i} \mathbf{W} \cdot \mathbf{n} dS$$

が成り立ちます. (*) に代入すれば

$$\int_{S^2} \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS = \sum_i \int_{\bar{V}_i} \mathbf{W} \cdot \mathbf{n} dS = \int_{S^2} \mathbf{W} \cdot \mathbf{n} dS$$

となります. \mathbf{W} であれば \mathbb{R}^3 全体で定義されているので, この積分を Gauss の発散定理で計算することには何の問題もありません.

幾何入門レポート問題 12 (2019 年 7 月 12 日)

担当：境 圭一

各自の学籍番号の下 2 桁の数を k とおく．例えば 18S1099Z なら $k = 99$ ．また $l := 61 - k$, $m := 30 - |30 - k|$ とおく．
 $S^2 := \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3 \mid |\mathbf{u}| = 1\}$ の向きを $\mathbf{n}(\mathbf{u}) := \mathbf{u}$ で与える． $V(x, y, z) := (z^k x, x^l y, y^m z)$ に対し, $\int_{S^2} \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS$ を計算せよ．
(7/19 の 3 限開始時まで提出してください)

http://math.shinshu-u.ac.jp/~ksakai/19_geometry/19_geometry.html