幾何入門 レポート 12（2019 年 7 月 12 日）コメント

担当：境 圭一

l, m の設定はバランスを取ろうとしたものでしたが，意図していたのは $m = |30 - k|$ でした．書き間違いです．すみません．もちろん問題を解くにあたり影響はありません．

$\Omega := \{\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^3 \mid |\boldsymbol{u}| < 1\}$（講義では $\mathring{D}^3$ という記号を使いました）は S^2 に囲まれる有界領域です．Gauss の発散定理を使うためにチェックすべきことは

(1) 向きに関して：与えられた S^2 の向きは Ω の内側から外側に向かう向きです

(2) $\boldsymbol{V}$ が $\overline{\Omega}$ を含む領域上定義されていること：$\boldsymbol{V}$ は $\mathbb{R}^3$ 全体で定義されており，$\overline{\Omega} \subset \mathbb{R}^3$ です

これらを確認すれば，Gauss の発散定理から

$$\int_{S^2} \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n}\, d\boldsymbol{S} = \int_{\Omega} \mathrm{div}\boldsymbol{V}\, dxdydz = \int_{\Omega} (z^k + x^m + y^m)\, dxdydz$$

を得ます．もし (1) が逆向きなら右辺にマイナスが必要です．(2) がダメなら，Gauss の発散定理を（そのまま）使うことは諦めなければなりません（演習問題 12, 問題 2 参照）．これらのチェックを欠かしてはいけません．「いつもこうだから今回も大丈夫だろう」というのが事故の元です．そういった失敗を繰り返して重大な過失を招いている人たちを色々なニュースで見聞きするはずです．皆さんはそうなってはいけません．たかが積分の問題ですが，ここで気を配る習慣をつけなければ，社会へ出てから急に気を配れるようになるはずがありません．この問題の場合は (1), (2) とも明らかではありますが，きちんとチェックしている人も少なからずいましたので，採点上は差をつけることにしました．

(2) が必要なのは，例えば $\boldsymbol{W}(\boldsymbol{u}) = (1 - |\boldsymbol{u}|^2)^{1/3}\, \boldsymbol{u}$ を考えてもらうとわかると思います．$\boldsymbol{W}$ はこの問題の Ω に対し (2) をみたさないベクトル場で，実際に計算してみると，Gauss の発散定理の左辺と右辺は異なることが確かめられます．

z^k, x^m, y^m をそれぞれ積分すればよいわけですが，いずれもやり方はまったく同じです．例えば

$$\int_{\Omega} z^k\, dxdydz = \int_{z=-1}^{1} z^k \Big(\int_{x^2+y^2<1-z^2} dxdy \Big) dz = \pi \int_{-1}^{1} z^k (1 - z^2)\, dz$$

です．k が奇数なら被積分関数は奇関数なので，積分値は 0 です．k が偶数なら被積分関数は偶関数なので

$$2\pi \int_0^1 (z^k - z^{k+2})\, dz = 2\pi \Big(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+3} \Big)$$

です．x^m, y^m についても計算は同様で，文字が入れ替わっていることだけが違いです．

3 次元の極座標を使った計算も可能ではありますが，極座標が有効なのは $x^2 + y^2 + z^2$ を含むような式の場合で（その場合は偏角が消えるので，実質的に積分する変数が減ります），この問題では得策ではないと思います．