幾何入門 レポート 13（2018 年 7 月 19 日）コメント

担当：境 圭一

定義通り計算するのは面倒で，Stokes の定理を使うと計算が容易になるように作ってある問題です．Stokes の定理を使う際に最も重要なのは，曲面の向き $\boldsymbol{n}$ が ∂S に導く向きを正しく把握できるか，という点です．この問題の場合は $\partial_\pm S := \{(\pm 1, y, z) \in S\}$ とおくと $\partial S = \partial_+ S \cup \partial_- S$ です．例えば $U := \{(s,t) \in \mathbb{H}^2 \mid 0 < s < 2\pi,\ |t| \le 1\}$ とおき，

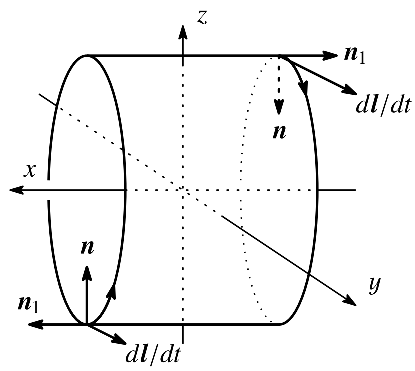
$$\boldsymbol{\varphi}\colon U \to S, \quad \boldsymbol{\varphi}(s,t) := (1-t,\ \cos(s),\ \sin(s))$$

とおくと，$\boldsymbol{\varphi}$ は $(1,1,0)$ 以外の ∂S_+ の点のまわりの局所座標になっていて，$\boldsymbol{n}$ に適合することもわかります．よって講義でやった命題 10.5 により，$\boldsymbol{l}_+(s) := \boldsymbol{\varphi}(s,0) = (1,\ \cos(s),\ \sin(s))$ が ∂S_+ に導かれる向きを表します．$\partial_- S$ についても同様に考えれば，与えられた向き $\boldsymbol{n}$ が導く $\partial_\pm S$ の向きは，例えば

$$\boldsymbol{l}_\pm(t) := \begin{pmatrix} \pm 1 \\ \cos(\pm t) \\ \sin(\pm t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm 1 \\ \cos t \\ \pm \sin t \end{pmatrix}$$

で表されます．

上のような答案がベストだと思いますが，例えば次のような図を描けば，境界に導かれる向きがわかっている，と十分にわかるような答案になります．



逆にこのような考察の跡がないと，答が正しくても不可あるいは減点です．例えば S の絵だけが描いてあっても，それでは向きを検討したことにはならないでしょう．向き $\boldsymbol{n}$ や，抗議で $\boldsymbol{n}_1$ という記号で表したベクトルなど，幾何学的に重要なポイントがわかることが大切です．図が綺麗である必要はありません[*1]．

Stokes の定理を使わなくても，上の $\boldsymbol{\varphi}$ のような局所座標を使って定義通り計算することも可能です．一般的に，Stokes の定理や Gauss の発散定理などは，計算不可能なものを可能にしているわけではなく，単に簡略化しているにすぎません．

境界つき曲面 S の境界 ∂S は，定義に従えば各点のまわりの局所座標を取って初めて特定されるものですが，局所座標を取るのは曲面の絵が見えていないと無理で，絵が見えた時点で ∂S がどこかもわかりますから，絵を描けば十分でしょう．

「$\partial_\pm S = \{(\pm 1, y, z) \in S\}$ となる」のような答案は変です．$\partial_\pm S$ という記号は問題文中には与えられておらず，自分で設定すべきものです．「$\partial_\pm S = \{(\pm 1, y, z) \in S\}$ とおくと $\partial S = \partial_+ S \cup \partial_- S$」ならわかります．

また「$\partial_\pm S = (\pm 1, y, z) \in S$」はもっと変です．左辺は集合で，右辺は点です．

[*1] 講義の板書を見ればわかる