幾何入門 演習問題 14（2019 年 7 月 26 日）

担当：境 圭一

1. $\Omega := \{\boldsymbol{u} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \neq 0\}$ とおく．Ω は $\mathbb{R}^3$ から z 軸を除いて得られる領域である．
   (1) Ω 上のベクトル場 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{u}) = \dfrac{1}{x^2 + y^2}(-y,\, x,\, 0)$ について，$\mathrm{rot}\boldsymbol{V}$ を計算せよ．
   (2) $\boldsymbol{l}\colon \mathbb{R} \to \Omega$ を $\boldsymbol{l}(t) := (\cos t, \sin t, 0)$ で表される Ω 内の閉曲線を L とする．$\displaystyle\int_l \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{l}$ を計算せよ．
   (3) Ω は単連結でないことを示せ．
   (4) $\mathrm{T} := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ とおくとき $(r-2)^2 + z^2 = 1\}$ で表されるトーラスを考える．$L \subset \mathrm{T} \subset \Omega$ であることを示せ．
   (5) L を T 内で連続的に変形して 1 点に縮めることはできないことを示せ．
   (6) $\boldsymbol{m}\colon [0, 2\pi] \to \Omega$ を $\boldsymbol{m}(t) := (\cos 2t, \sin 2t, \sin(t/2))$ で定義する．$\displaystyle\int_m \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{m}$ を計算せよ．$\boldsymbol{m}([0, 2\pi])$ を図示し，積分値の意味を (2) と比較しながら考えてみよ．

※以下，今までの復習と補足です

2. (1) 関数 $f(x, y, z) := xy + yz + zx$ に対し，$\mathrm{grad}(f)(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{0}$ となる $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^3$ をすべて求めよ．
   (2) ベクトル場 $\boldsymbol{V}(x, y, z) = (x(y^2 + z^2), y(z^2 + x^2), z(x^2 + y^2))$ に対し，$\mathrm{div}\boldsymbol{V}, \mathrm{rot}\boldsymbol{V}, \mathrm{div}(\mathrm{rot}\boldsymbol{V})$ を計算せよ．
   (3) $\mathbb{R}^3$ 上のベクトル場 $\boldsymbol{W}$ が $\mathrm{div}\boldsymbol{W} \neq 0$ をみたすとき，$\boldsymbol{W} = \mathrm{rot}\boldsymbol{U}$ となるような C^∞ 級ベクトル場 $\boldsymbol{U}$ は存在しないことを証明せよ．
3. $S := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + (y/2)^2 + (z/3)^2 = 1\}$ とおく．
   (1) S は向きづけ可能な曲面であることを示し，S の概形を図示せよ．
   (2) 各 $\boldsymbol{u} = (a, b, c) \in S$ に対し，$T_{\boldsymbol{u}}S$ を表す方程式を求めよ．また $T_{\boldsymbol{u}}^{\perp}S$ の基底を 1 つ求めよ．
   (3) S の向き $\boldsymbol{n}\colon S \to \mathbb{R}^3$ で，$\boldsymbol{n}(1, 0, 0) = (-1, 0, 0)$ をみたすものを求めよ．
   (4) $\boldsymbol{V}(x, y, z) := (x^3 + xyz - xy^2,\ y - y^2z + y^3,\ \dfrac{yz^2}{2} - 3zx^2 - y^2z)$ と $\boldsymbol{W}(x, y, z) := \dfrac{(x,\ y-1,\ z)}{(x^2 + (y-1)^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$ に対し，$\displaystyle\int_S \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n}\, d\boldsymbol{S}$ と $\displaystyle\int_S \boldsymbol{W} \cdot \boldsymbol{n}\, d\boldsymbol{S}$ を計算せよ．ただし S の向きは (3) のものとする．
4. $f(x, y, z) := x^2 + (y-1)^2 - (z+2)^2 - 1$ とおく．
   (1) $S := f^{-1}(0)$ とおく．S は向きづけ可能な曲面であることを示し，S の概形を図示せよ．
   (2) S を平面 $z = k$ で切った切り口は円であることを示し，その半径が最小となるような k を求めよ．
   (3) S は閉曲面か，理由とともに答えよ．（ヒント：S は有界か？）
   (4) $\boldsymbol{u} = (a, b, c) \in S$ とする．$T_{\boldsymbol{u}}S$ を表す方程式を求めよ．また $T_{\boldsymbol{u}}^{\perp}S$ の基底を 1 つ求めよ．
   (5) $S' := \{(x, y, z) \in S \mid -3 \leq z \leq -1\}$ とおく．S' は境界つき曲面であることを示せ．$\partial S'$ を求めよ．
   (6) $\boldsymbol{n}(1, 1, -2) = (1, 0, 0)$ となる S の向きが $\partial S'$ に導く向きを求めよ．
   (7) $\boldsymbol{V}(x, y, z) := ((1-y)(z+2),\ x\sin(\dfrac{\pi z}{2}),\ z^2)$ に対し，$\displaystyle\int_{S'} \mathrm{rot}\boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n}\, d\boldsymbol{S}$ を計算せよ．
5. (1) $S := \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid (x/2)^2 + y^2 \leq 1\}$ は境界つきコンパクト曲面であることを示せ．∂S を求めよ．
   (2) S の向きを $\boldsymbol{n}\colon S \to \mathbb{R}^3, \boldsymbol{n}(x, y, 0) := (0, 0, 1)$ で与える．∂S を表す周期的な正則パラメータ $\boldsymbol{l}\colon \mathbb{R} \to S$ で，$\boldsymbol{n}$ が導く ∂S の向きを表すものを 1 つ求めよ．
   (3) S と $\boldsymbol{V}(x, y, z) = (V_1(x, y), V_2(x, y), 0)$ の形のベクトル場に対し Stokes の定理を適用し，得られた等式と 2 次元の場合の Green の公式（講義の定理 6.15）を比較せよ．

（提出の必要はありません）

補足 1：「**閉曲線が 1 点に縮む**」ということの定義．詳細は「トポロジー」に譲り，ここでは概略だけ述べます．
一般に，曲線 $\boldsymbol{l}\colon [a, b] \to \mathbb{R}^n$ の**連続変形**（ホモトピー (homotopy) という）とは，連続写像 $\boldsymbol{h}\colon [0, 1] \times [a, b] \to \mathbb{R}^n$ で，任意の $t \in [a, b]$ に対し $\boldsymbol{h}(0, t) = \boldsymbol{l}(t)$ となるようなものをいいます．$\boldsymbol{h}$ が連続とは，$\boldsymbol{h} = (h_1, h_2, \ldots, h_n)$ と書いたとき，

各 h_k が 2 変数の連続関数であることを指します．$\boldsymbol{l}_s(t) := \boldsymbol{h}(s,t)$ とおくと，各 $s \in [0,1]$ に対し $\boldsymbol{l}_s\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ は曲線で，s を動かすと，$\boldsymbol{l}_0 = \boldsymbol{l}$ から始まって「連続的に」$\boldsymbol{l}_1$ まで変形していくわけです．

閉曲線 $\boldsymbol{l}\colon \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^n$ が**連続変形で 1 点 $\boldsymbol{u}_0$ に縮む**とは，連続変形 $\boldsymbol{l}_s$ $(0 \le s \le 1)$ で $\boldsymbol{l}_1$ が $\boldsymbol{u}_0$ への**定値写像**となる，つまり $\boldsymbol{l}_1(t) = \boldsymbol{u}_0$ $(\forall t \in \mathbb{R}^1)$ となるものが存在することをいいます．もとの曲線 $\boldsymbol{l}$ が連続変形 $\boldsymbol{l}_s$ により変形していき，最後に 1 点 $\boldsymbol{u}_0$ に「つぶれる」様子を思い浮かべてみてください．

簡単な例として，$\boldsymbol{l}(t) = (\cos t, \sin t)$ が表す $\mathbb{R}^2$ 内の閉曲線は，ホモトピー $\boldsymbol{l}_s(t) := ((1-s)\cos t,\ (1-s)\sin t)$ により $\mathbf{0}$ への定値写像に縮むことがわかります．より一般に，$\mathbb{R}^n$ 内の任意の閉曲線 $\boldsymbol{l}\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ は，ホモトピー $\boldsymbol{l}_s(t) := (1-s)\boldsymbol{l}(t)$（右辺はベクトルのスカラー倍）により $\mathbf{0}$ への定値写像に縮みます．従って $\mathbb{R}^n$ は単連結です．このホモトピーは $\mathbb{R}^n$ が凸集合であることにより定義されるものです．

補足 2：単連結性と積分について． この講義では $\mathbb{R}^n$ の領域についてのみ単連結性を議論しましたが，演習 14-1 のトーラスのように，$\mathbb{R}^n$ の領域とは限らない図形（**位相空間**）に対し，それが単連結か否かを定義することができます：ある図形（位相空間）X と，X に含まれる点 $x_0 \in X$（**基点** (basepoint) とよぶ）が与えられているとします．X の中の 2 つの閉曲線 $\boldsymbol{l}, \boldsymbol{m}\colon \mathbb{R} \to X$ で $\boldsymbol{l}(0) = \boldsymbol{m}(0) = x_0$ をみたすものについて，これらが基点を動かさない連続変形で互いにうつりあうとき，これらは**同値**であると定め $\boldsymbol{l} \sim \boldsymbol{m}$ と書くことにします．$\sim$ は**同値関係**になっていることが確かめられ，商集合

$$\pi_1(X, x_0) := \{L \subset X \mid L \text{ は } x_0 \text{ を基点とする閉曲線 }\}/\!\sim$$

を考えることができます．実は $\pi_1(X, x_0)$ は**群** (group) の構造を持つことが示されます．$\pi_1(X, x_0)$ を，x_0 を基点とする X の**基本群** (fundamental group) とよびます．群構造についての詳細は「トポロジー」に譲りますが，単位元は x_0 への定値写像で与えられます．X が**単連結**であるとは，基本群が自明な群であること，つまり $\pi_1(X, x_0) = \{1\}$ であることと定義されます．X 内のすべての閉曲線が連続変形で x_0 に縮むこと，とも言い換えられます．

逆に単連結でない図形（位相空間）X は連続変形で縮まない閉曲線を含むことになり，縮むことを妨げる幾何学的な特徴を持っていることになります．このように，**1 点に縮まない閉曲線がどれくらいあるか**，ということにより図形（位相空間）の複雑さを測ろうというのが基本群のアイデアです．

演習 14-1 が示すのは，トーラスは単連結でないこと，つまり $\pi_1(\mathrm{T}, x_0) \neq \{1\}$ ということです．実は $\pi_1(\mathrm{T}, x_0) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ で，演習 14-1 の L はこの群の生成元の 1 つであることが示されます．「浮き輪」であるトーラスの，人が入る場所に空いている「穴」が，L が 1 点に縮むことを妨げている幾何学的な特徴で，基本群はそれを「群」という代数的な言葉でとらえているわけです．

X 内の閉曲線が 1 点に縮む場合，その証明はある意味で簡単で，実際に 1 点に縮めるホモトピーを構成すればよいことになります．しかし「決して 1 点に縮まないこと」の証明は一般に容易ではありません．例えば演習 14-1 の $L \subset \mathrm{T}$ が T 内で 1 点に縮まないことは見た目には明らかに思えますが，我々の思いもつかぬ変形により 1 点に縮むかもしれず，その可能性を排除するのは簡単ではありません．この可能性を明確に否定する手段の 1 つがこの講義で学んだ線積分です．講義で述べたように，演習 14-1 の積分値は，実は L を Ω 内で連続的に変形しても，その積分値は変化せず常に 2π のままです．この値が 0 でないことにより，L は Ω 内で（従って T 内でも）決して 1 点に縮まないことが保証されます．

線積分や面積分のように，**図形を連続的に変形しても変化しない，図形の「芯」とか「骨格」にあたるような性質を取り出すものを（ホモトピー）不変量** (homotopy invariant) とよびます．今後学ぶ「位相空間論」や「トポロジー」，「ホモロジー論」で，いろいろな不変量に出会うことになります．

幾何入門 レポート問題 **14**（**2019** 年 **7** 月 **26** 日）

担当：境 圭一

$\boldsymbol{l}(t) := (\cos t, \sin t, \cos t)$ で表される $\mathbb{R}^3$ 内の閉曲線を L とする．境界つき曲面 $S \subset \mathbb{R}^3$ がコンパクトかつ向きづけ可能で $\partial S = L$ となるとき，S は z 軸と交わることを示せ．

※ **8/1**（木）**13:00** までに研究室 (A403) のレポートボックスに提出してください．レポート 13, 14 とも，採点が終わり次第，研究室前で返却します．

http://math.shinshu-u.ac.jp/~ksakai/19_geometry/19_geometry.html