幾何入門 レポート 14（2019 年 7 月 26 日）コメント

担当：境 圭一

$\Omega := \mathbb{R}^3 \setminus (z$ 軸$)$ 上定義されるベクトル場

$$\boldsymbol{V}(x,y,z) := \frac{1}{x^2+y^2}\begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$$

について，まず直接計算により $\mathrm{rot}\boldsymbol{V} = \boldsymbol{0}$ がわかります．一方で

$$\int_L \boldsymbol{V}\cdot d\boldsymbol{l} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\cos^2 t + \sin^2 t}\begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} dt = 2\pi \tag{$*$}$$

となります．$\partial S = L$ となる向きづけ可能コンパクト曲面 $S \subset \mathbb{R}^3$ を取り（講義で述べたように $\mathbb{R}^3$ は単連結なので，これは可能です），$S \subset \Omega$ と仮定すると，Stokes の定理と $\mathrm{rot}\boldsymbol{V} = \boldsymbol{0}$ から

$$\int_L \boldsymbol{V}\cdot d\boldsymbol{l} = \pm\int_S \mathrm{rot}\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{n}\,d\boldsymbol{S} = \pm\int_S \boldsymbol{0}\cdot\boldsymbol{n}\,d\boldsymbol{S} = 0$$

となり，これは $(*)$ に矛盾します．よって $S \not\subset \Omega$ でなければならず，これは S が z 軸と交わることを意味します．
講義では絡み数のことについて少しお話ししましたが，その性質について厳密な証明を与えたわけではないので，上のような議論をしてください．
この問題の結論は「Ω は単連結領域ではない」ということです．「Ω が単連結である」と逆のことを書いている答案は明らかに誤りです．
$\mathrm{rot}\boldsymbol{V} = \boldsymbol{0}$ ですが，Ω 内の閉曲線 L に沿った $\boldsymbol{V}$ の線積分が 0 でないので，Ω は単連結ではありません．しかし，直ちに「L を Ω 内で 1 点に縮めるとき途中で必ず z 軸と交わる」というのは早計です．例えば $\boldsymbol{m}(t) = (\cos t + 10, \sin t, 0)$ で表される閉曲線を $M \subset \Omega$ とすると，M は Ω 内で連続変形により 1 点に縮みます．
Ω が単連結であることの定義は

「Ω 内の**任意の**閉曲線が Ω 内で連続変形により 1 点に縮む」

でしたから，Ω が単連結でないことは

「Ω 内の**ある**閉曲線は，Ω 内で連続変形により 1 点に縮めることはできない」

と同値です．
問題文に Ω は定義されていません．講義では確かに領域を Ω という記号で表すことが多かったと思いますが，答案上はきちんと定義すべきです．また，ベクトル場 $\boldsymbol{V}$ が Ω 上定義されることは言及しておくべきでしょう．

実は向きづけ可能性はあまり本質的でなく，今回の問題の L と Ω に対し，$\partial S = L$ となる Ω 内のコンパクト曲面 S は（Möbius の帯のようなものも許したとしても）存在しません．一方でコンパクト性（有界かつ閉であること）は本質的で，$\partial S = L$ となる Ω 内の非コンパクト曲面として

$$S_1 := \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 = 1,\ x \le z\},\quad S_2 := \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x = z,\ 0 < x^2+y^2 \le 1\}$$

があります．S_1 は有界でないが閉集合である曲面，S_2 は有界だが閉集合でない曲面で，どちらも境界は L です．
また上の計算を見ると，$\boldsymbol{l}(t)$ の z 座標は何であっても結論には影響しないことがわかります．これは講義で述べた，$\mathrm{rot}\boldsymbol{V} = \boldsymbol{0}$ の仮定の下で線積分が不変であることの 1 つの表れです．

毎回それなりに大変だったはずのレポートに取り組むのは厳しかったかもしれませんが，しっかり向き合ってきた人は，それに見合うだけのものを得たはず，と思います．必ずしも目先の点数に現れなくとも，例えば今後の講義を理解する力として徐々に成果が出てくるのではないかと思います．逆に，様々な手を講じて点数だけ確保してしまった

人は，そのような機会を逸したことになります．まだ軌道修正できますから，今後の講義ではしっかり数学に向き合ってみてください．