特に断らなければ $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ とする．ベクトルは縦横のどちらで書いても差し支えない．要点が押さえられていれば，必ずしもすべての計算過程を書く必要はない．「答のみでよい」と書かれている問題について，誤りを含む途中経過が書かれている場合は減点の対象になり得る．

1. (1) $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ に対し，$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ を計算せよ．また，$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ が張る平行六面体の体積 V を求めよ．（答のみでよい）

   (2) $\theta \in \mathbb{R}$ を定数とする．$\mathbb{R}^2$ 上の関数 $f(\boldsymbol{u}) := (1 + \cos\theta)x^2 - 2(\sin\theta)xy + (2 - \cos\theta)y^2$ に対し，$\mathrm{grad}(f)(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{0}$ となる $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^2$ をすべて求めよ．（答のみでよい）

   (3) $\mathbb{R}^2$ 上のベクトル場 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{u}) := \begin{pmatrix} x^3 - x^2 + xy^2 - 2xy \\ -x^2y - 2xy + 4y \end{pmatrix}$ に対し，$\mathbb{R}^2$ 上の関数 $\mathrm{div}\boldsymbol{V}$ の最大値，最小値があればそれを求め，ない場合は「なし」と答えよ．（答のみでよい）

   (4) $k \in \mathbb{R}$ を定数とする．$\mathbb{R}^2$ 上の関数 $g(\boldsymbol{u}) := e^{2x} \sin ky$ に対し，$\mathbb{R}^2$ 上の関数 $\mathrm{div}(\mathrm{grad}(g))$ が恒等的に 0 となるような定数 k をすべて求めよ．（答のみでよい）

   (5) $h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を $h(\boldsymbol{u}) := x^3 - xy + y^3 - 1$ で定める．$L := h^{-1}(0)$ は $\emptyset$ かどうか，$\emptyset$ でない場合は正則曲線かどうか，理由とともに答えよ．

2. $\mathbb{R}^2$ 上のベクトル場 $\boldsymbol{V}, \boldsymbol{W}$ を $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{u}) := \begin{pmatrix} 4x^3 + 2xy^2 \\ 2x^2y + 4y^3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{W}(\boldsymbol{u}) := \begin{pmatrix} 4x^2 + 2y^2 \\ 2x^2 + 4y^2 \end{pmatrix}$ で定義する．

   (1) $\mathrm{div}\boldsymbol{V}, \mathrm{rot}\boldsymbol{V}, \mathrm{div}\boldsymbol{W}, \mathrm{rot}\boldsymbol{W}$ を求めよ．（答のみでよい）

   (2) C^∞ 級関数 $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ で $\boldsymbol{V} = \mathrm{grad}(f)$ をみたすものは存在するか？存在するならば f を 1 つ与え，存在しないならばそのことを証明せよ．

   (3) C^∞ 級関数 $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ で $\boldsymbol{W} = \mathrm{grad}(g)$ をみたすものは存在するか？存在するならば g を 1 つ与え，存在しないならばそのことを証明せよ．

   (4) 曲線のパラメータ $\boldsymbol{l}\colon [0, \pi] \to \mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{l}(t) := \begin{pmatrix} t\cos t \\ t\sin t \end{pmatrix}$ に対し，$\displaystyle\int_{\boldsymbol{l}} \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{l}$ を計算せよ．

   (5) 曲線のパラメータ $\boldsymbol{m}\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{m}(t) := \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$ に対し，$\displaystyle\int_{\boldsymbol{m}} \boldsymbol{W} \cdot d\boldsymbol{m}$ を計算せよ．

3. $\Omega := \{\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x, y < 1\}$ とし，$L := \partial\Omega$ には Ω が導く向きを入れる．この向きを表す区分的正則な周期的パラメータ $\boldsymbol{l}$ と，ベクトル場

$$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{u}) := \begin{pmatrix} x^7 + 2x^6y - x^5y^2 + 3x^4y^3 - 2x^3y^4 - 3x^2y^5 - xy^6 \\ x^6y - 6x^5y^2 + 2x^4y^3 - 3x^3y^4 + x^2y^5 + xy^6 + y^7 \end{pmatrix}$$

   に対し，$\displaystyle\int_{\boldsymbol{l}} \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n}\, dl$ を計算せよ．

4. $\Omega := \mathbb{R}^2 - \{\boldsymbol{0}\}$ 上のベクトル場 $\boldsymbol{V}\colon \Omega \to \mathbb{R}^2$ を $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{u}) := \dfrac{1}{9x^2 + y^2}\begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$ で定める．曲線のパラメータ $\boldsymbol{l}\colon [1, 2] \to \Omega$, $\boldsymbol{l}(t) := \begin{pmatrix} t\cos 2\pi t \\ t\sin 2\pi t \end{pmatrix}$ に対し，$\displaystyle\int_{\boldsymbol{l}} \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{l}$ を計算せよ．

配点：15, 15, 5, 5　(**1**: $3 \times 5 = 15$,　**2**: $3 \times 5 = 15$)