幾何入門 中間試験（2019 年 6 月 7 日）解答例

担当：境 圭一

※スペース節約のため，ベクトルを横に書く場合があります

1. (1) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(-3,\ 1,\ 1),\quad V=4.$
   (2) $\cos\theta\neq-1$ のとき $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{0}$, $\cos\theta=-1$ のとき $\boldsymbol{u}=(x,\ 0)$ $(x\in\mathbb{R})$ と表せるすべての $\boldsymbol{u}$.
   (3) 最大値なし，最小値 1.
   (4) $k=0,\pm2.$
   (5) $h(1,0)=0$ だから $(1,0)\in L$, よって $L\neq\emptyset$ である．$\mathrm{grad}(h)=(3x^2-y,\ -x+3y^2)$ だから，$\mathrm{grad}(h)(\boldsymbol{u})=\boldsymbol{0}$ となるのは $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{0}$ または $(1/3,\ 1/3)$ のときに限るが，$h(\boldsymbol{0})=-1$, $h(1/3,\ 1/3)=-28/27$ だから $\boldsymbol{0},(1/3,\ 1/3)\notin L$. 従って L 上 $\mathrm{grad}(h)\neq\boldsymbol{0}$ だから，L は正則曲線である．
2. (1) $\mathrm{div}\boldsymbol{V}=14(x^2+y^2),\quad \mathrm{rot}\boldsymbol{V}=0,\quad \mathrm{div}\boldsymbol{W}=8(x+y),\quad \mathrm{rot}\boldsymbol{W}=4(x-y).$
   (2) $f(\boldsymbol{u})=x^4+x^2y^2+y^4.$
   (3) (1) より $\mathrm{rot}\boldsymbol{W}\neq0$ だから，$\mathrm{grad}(g)=\boldsymbol{W}$ をみたす C^∞ 級関数 g は存在しない．
   (4) (2) より $\displaystyle\int_{\boldsymbol{l}}\boldsymbol{V}\cdot d\boldsymbol{l}=f(\boldsymbol{l}(\pi))-f(\boldsymbol{l}(0))=f(\pi,\ 0)-f(\boldsymbol{0})=\pi^4.$
   (5) $\displaystyle\int_{\boldsymbol{m}}\boldsymbol{W}\cdot d\boldsymbol{m}=\int_0^{2\pi}\begin{pmatrix}2(\cos^2t+1)\\2(\sin^2t+1)\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-\sin t\\\cos t\end{pmatrix}dt=2\int_0^{2\pi}\Big(\frac{1}{3}(\cos^3t)'+\frac{1}{3}(\sin^3t)'-\sin t+\cos t\Big)dt=0.$
3. $\boldsymbol{V}$ は $\overline{\Omega}$ を含む領域 $\mathbb{R}^2$ 上定義されるから，Gauss の発散定理より $\displaystyle\int_{\boldsymbol{l}}\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{n}\,dl=\int_\Omega\mathrm{div}\boldsymbol{V}\,dxdy$. 一方 $\mathrm{div}\boldsymbol{V}=8x^6+x^4y^2-x^2y^4+6y^6$. Ω は直線 $y=x$ に関して線対称だから，Ω 上での x^6 と y^6 の積分，x^4y^2 と x^2y^4 の積分はそれぞれ等しい．よって

$$\int_\Omega\mathrm{div}\boldsymbol{V}\,dxdy=\int_\Omega(8x^6+6y^6)\,dxdy=14\int_\Omega x^6\,dxdy=14\int_{y=0}^1dy\int_{x=0}^1x^6\,dx=2.$$

4. まず $\mathrm{rot}\boldsymbol{V}=0$ であることに注意しておく．
   $\widetilde{\boldsymbol{l}}\colon[0,2]\to\Omega$ を

$$\widetilde{\boldsymbol{l}}(t):=\begin{cases}(-t+2,\ 0) & 0\le t\le 1,\\ \boldsymbol{l}(t) & 1\le t\le 2\end{cases}$$

で定義すると，$\widetilde{\boldsymbol{l}}$ は向きのついた区分的に滑らかな閉曲線 L を表す（図 2 を参照のこと）．
十分小さい $\epsilon>0$ に対し，$\boldsymbol{m}\colon[0,2\pi]\to\Omega$ を $\boldsymbol{m}:=\epsilon(\cos(-t),\ 3\sin(-t))=\epsilon(\cos t,\ -3\sin t)$ で定義し，$\boldsymbol{m}$ で表される向きのついた閉曲線を M とする．L と M で囲まれる有界領域を Ω' とすると，$\boldsymbol{V}$ は $\overline{\Omega'}$ を含む領域 Ω 上定義され，$\partial\Omega'$ は向きも込めて L と M で表されるから，Green の公式と $\mathrm{rot}\boldsymbol{V}=0$ より

$$\int_L\boldsymbol{V}\cdot d\boldsymbol{l}+\int_M\boldsymbol{V}\cdot d\boldsymbol{m}=\int_{\Omega'}\mathrm{rot}\boldsymbol{V}dxdy=0.$$

よって

$$\int_L\boldsymbol{V}\cdot d\boldsymbol{l}=-\int_{\boldsymbol{m}}\boldsymbol{V}\cdot d\boldsymbol{m}=-\int_0^{2\pi}\frac{1}{9\epsilon^2(\cos^2+\sin^2t)}\epsilon\begin{pmatrix}3\sin t\\\cos t\end{pmatrix}\cdot\epsilon\begin{pmatrix}-\sin t\\-3\cos t\end{pmatrix}dt=\frac{1}{3}\int_0^{2\pi}dt=\frac{2\pi}{3}.$$

一方 $\displaystyle\int_L\boldsymbol{V}\cdot d\boldsymbol{l}=\int_{\boldsymbol{l}}\boldsymbol{V}\cdot d\boldsymbol{l}+\int_{\widetilde{\boldsymbol{l}}}\boldsymbol{V}\cdot d\widetilde{\boldsymbol{l}}$ であり

$$\int_{\widetilde{\boldsymbol{l}}}\boldsymbol{V}\cdot d\widetilde{\boldsymbol{l}}=\int_0^1\frac{1}{9(-t+2)^2+0}\begin{pmatrix}0\\-t+2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}dt=0$$

となるから，求める積分値は $\dfrac{2\pi}{3}$.

解説.

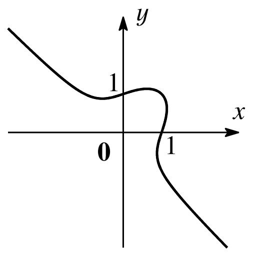

図 1　問題 1. (5) の曲線 L

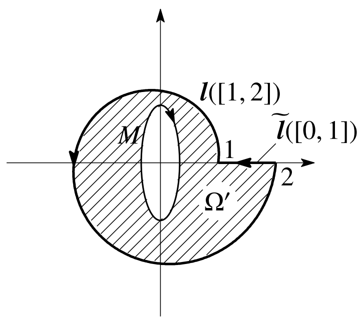

図 2　問題 4 の曲線 L, M

1. この講義で導入した関数やベクトル場の定義を知っているか，基本的な関数の取り扱いができるか，を問う問題．(1) は $V = |(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c}|$ を使うと簡単．(2) はレポート 2 で「$\mathrm{grad}(f)(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{0} \iff \boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$」だった部分が非自明であることの理由．(3) は $\mathrm{div}\boldsymbol{V} = 2(x-1)^2 + (y-1)^2 + 1$ となる．(4) は $\mathrm{div}(\mathrm{grad}(g)) = \dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2} = (4-k^2)g$ からわかる．(5) の L は図 1 のようになる．図示するのは難しいが，原点のまわりに $\pi/4$ 回転させると少し簡単になるかもしれない．正則性だけなら計算だけでわかる．
2. 線積分（その 1）についての理解を問う問題．(2) は $f = x^4 + x^2y^2 + y^4 + c$ (c は定数) も正解．(3) と (5) は矛盾しない．ベクトル場 $\boldsymbol{W}$ がポテンシャルを持つ必要十分条件は「**任意の閉曲線** $\boldsymbol{l}$ に対し $\displaystyle\int_{\boldsymbol{l}} \boldsymbol{W} \cdot d\boldsymbol{l} = 0$」だった．(3) が言っているのは「**ある 1 つの閉曲線** $\boldsymbol{m}$ に対し $\displaystyle\int_{\boldsymbol{m}} \boldsymbol{W} \cdot d\boldsymbol{m} = 0$」で，これだけでは $\boldsymbol{W}$ のポテンシャルの有無については何もわからない．
3. Gauss の発散定理を題材に，積分の計算力を問う問題．解答例のような対称性を使った議論は必須ではないが，計算してみると結局は解答例のようなことに気づくだろう．線積分（その 2）を定義通り計算するのは，この問題では得策ではない．
4. Green の公式を使った応用．定義通りに計算すると $\displaystyle\int_1^2 \frac{dt}{1 + 8\cos^2 2\pi t}$ となり，$\boldsymbol{V}$ の分母の形が災いして面倒になる（計算可能ではある）．$\mathrm{rot}\boldsymbol{V} = 0$ であるおかげで，Green の定理により問題を M に沿った積分に置き換えることができ，そちらは容易である．L と M の向きに関する考察も必要だが，解答例では省略してある．

配点：15, 15, 5, 5　(**1**: $3 \times 5 = 15$,　**2**: $3 \times 5 = 15$)

http://math.shinshu-u.ac.jp/~ksakai/19_geometry/19_geometry.html