

2019 年度 幾何入門 中間試験 結果

担当：境 圭一

点数の人数分布は以下の通りです：

点数	~ 15	16 ~ 20	21 ~ 25	26 ~ 30	31 ~ 35	36 ~ 40
18S	5	11	26	7	4	1
それ以外	2	6	6	3	2	0

問題ごとの平均点は以下の通りです：

18S：

問題	1					2					3	4	計
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)			
平均	2.6	1.2	2.5	1.6	1.2	2.7	2.9	2.4	2.4	2.1	1.1	0.1	22.6

18S 以外：

問題	1					2					3	4	計
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)			
平均	2.6	1.1	2.8	1.4	0.7	2.8	2.9	2.8	2.2	2.2	1.1	0.0	23.0

答案用紙 No. 1 の右上に赤で中間試験の点数が、青でレポート 1~7 の点数の合計（最大 14 点）が書いてあります。大問ごとの点数は答案の終わりあたりに書いてあります（裏面の場合あり）。部分点はその都度書いてあります。

●問題 1, 2 で点を稼いでもらうつもりでしたが、特に問題 1 が良くありませんでした。高校や大学 1 年でやったはずの基本的な計算能力は、この講義に限らず、今後いろいろな数学をやる上での基礎になります。高校と大学の数学は、雰囲気は違いますが、別物ではありません。問題 1 ができなかった人は危機感を持ってください。

●問題 1. (2) はレポート 3 とほぼ同じ問題でしたが、 θ の値が変更されたために答が変わっています。レポート 3 で「 $\text{grad}(f)(\mathbf{u}) = \mathbf{0} \iff \mathbf{u} = \mathbf{0}$ 」とだけ書いて、なぜか減点された人は少なからずいたと思いますが、そういった場合はその理由を考え、同じような問題に出会ったときに対処できるようにしておかないといけません。高校と大学の数学は、雰囲気は違いますが、勉強の仕方が大きく変わるわけではありません。復習することが大切なのは一緒です。

●例えば問題 1 の (5) で、次のような適当でない記述が多くみられます：

- (i) 「 $\text{grad}(h)$ は $\mathbf{0}$ を解に持つので…」
- (ii) 「 $\mathbf{0}$ は L をみたさない」
- (iii) 「 h は L 上で正則曲線である」
- (iv) 「 $h(\mathbf{0}) = -1 \notin L$ 」

それぞれ次のように書きたいのだと思われまます；

- (1) 「 $\text{grad}(h)(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$ は $\mathbf{0}$ を解に持つので…」
- (2) 「 $\mathbf{0}$ は $h = 0$ をみたさない」
- (3) 「 L 上で $\text{grad}(h) = \mathbf{0}$ が成り立つので、 L は正則曲線である」
- (4) 「 $h(\mathbf{0}) = -1 \neq 0$ だから $\mathbf{0} \notin L$ 」

「解」というのは方程式の解ですし、「みたす」というのは例えば「等式をみたす」ということですのでし、正則曲線なのは L であって h ではありませんし、 \mathbb{R}^2 内の部分集合である L が -1 を含んだり含まなかったり、というのは変です。普段からノートを取ったりレポートを書いたりするときに、わかっているつもりのことを省略した書き方をしていると、上の (i)~(iv) のような書き方になってしまうのではないかと思います。少なくとも (1)~(4) のように、主語や述

語や目的語などを（最初のうちだけでも）きちんと書かないと，断片的に暗記するだけの勉強になってしまって，後に残るものが少なくなってしまいます．たくさん手を動かして書く手間を惜しんではいけないと思います．

●答のみを問う問題では，基本的には答のみを見て採点していますが，途中経過が大きく間違っている場合は減点している場合もあります．必要なことはもれなく書く必要がありますが，余計なことは書かないのも鉄則です．あえて隙を見せることはありません．

以下，問題ごとのコメントです．

- (4) $\operatorname{div}(\operatorname{grad}(g)) = (4 - k^2)g$ が恒等的に 0 になるのは， $4 - k^2 = 0$ のとき，または $g = 0$ （恒等的に 0 の定数関数）の場合です．出題者は後者を見落としており，解説のときに指摘されて気づきました．ありがとうございます．「 $k = n\pi/y$ 」のような答えがたくさんありましたが， k は定数ですから， x や y を含むことはありません．
 - (2) 「 $\operatorname{rot}V = 0$ だから $V = \operatorname{grad}(f)$ となる f が存在する」という答えがいくつかありましたが，これが誤りであることは演習で述べた通りです．例えば問題 4 の V は， $\operatorname{rot}V = 0$ ですが， $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ 上定義されるポテンシャルを持ちません．
 - (3) 「 $x \neq y$ のとき $\operatorname{rot}W \neq 0$ だから W はポテンシャルを持たず， $x = y$ のとき $\operatorname{rot}W = 0$ だから，このときは別途考える」という類の答えは誤りです．「恒等的に 0 の定数関数」と，「ある点 u において $g(u) = 0$ となるような関数 g 」の区別がついていないように思えます．「 $W = \operatorname{grad}(g) \implies \operatorname{rot}W = 0$ 」というのは，正確には「 $W = \operatorname{grad}(g) \implies \operatorname{rot}W$ は恒等的に 0 の定数関数」という意味です．
3. 積分の計算能力を測る問題なので，正解にたどり着かない限りは基本的に部分点はありせん．出題者が意図した Ω は 1 辺の長さ 1 の正方形領域でした．「周期的パラメータを取る」という記述があるので，そのように読むのは自然だと思ったのですが， $\{(x, y) \mid x > 0 \text{ かつ } y < 1\}$ と読んだ人が少なくありませんでした．そのように読めるのは確かだと思います．その場合は次のように計算すべきです：

Ω が導く $\partial\Omega$ の向きを考えると，そのパラメータは例えば

$$l: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad l(t) := \begin{cases} (-t, 1) & t \leq 0, \\ (0, 1 - t) & t \geq 0 \end{cases}$$

で与えればよいでしょう（もちろん周期的ではありません）．このパラメータを使うことにすると

$$\hat{n}(t) = \begin{cases} (0, 1) & t \leq 0, \\ (-1, 0) & t \geq 0, \end{cases} \quad \text{従って} \quad V(l(t)) \cdot \hat{n}(t) = \begin{cases} t^6 + 6t^5 + 2t^4 + 3t^3 + t^2 - t + 1 & t \leq 0, \\ 0 & t \geq 0 \end{cases}$$

ですから，求める積分は $\int_{-\infty}^0 (t^6 + 6t^5 + 2t^4 + 3t^3 + t^2 - t + 1) dt = +\infty$ と書かざるを得ないでしょう．

Ω を非有界領域ととらえた場合は，以上のような考察をできていれば最大で 4 点つけました．なお，Gauss の発散定理を使った場合は誤りです．Gauss の発散定理は有界領域に対してのみ適用されます．

- 解答例のような M を考えるのはよいのですが，「 l と m が囲む領域」というのは誤りです．これらは領域を囲んではいません．解答例にある $\tilde{l}([0, 1])$ の部分が考えられていないと不可です．

採点には万全を期しましたが，万が一誤りがあると思われる場合は，早めに申し出てください．答えは全てコピーを取り保存していますので，ただちに調べます．

●レポートも含めた現在までの点数を見て，あとどれくらいの点数を取りたいか / 取らなければならないかを確認し，今後の学習のやり方を考えてください．追試などの救済措置は一切取らないことは明言しておきます（レポートで十分なはず）．

(6/11)