特に断らなければ $\boldsymbol{u} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ とし，関数やベクトル場は全て C^∞ 級のものとする．ベクトルは縦横のどちらで書いても差し支えない．$\partial_x f := \dfrac{\partial f}{\partial x}$ のような略記は断りなく用いてよい．**要点が押さえられていれば**，必ずしも全ての計算過程を書く必要はない．答のみ問う問題でも，誤りを含む途中経過が書かれている場合は減点対象となり得る．

1. 次の問に答えよ．(1)〜(4) は答のみ記述せよ．
   (1) ベクトル場 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{u}) = (z^2x - 4xy + x,\ x^2y - 6yz + 4y,\ y^2z - 2zx + 9z)$ に対し，$(\mathrm{div}\boldsymbol{V})(\boldsymbol{u}) = 0$ となる $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^3$ をすべて求めよ．

   (2) ベクトル場 $\boldsymbol{W}(\boldsymbol{u}) := (y^4 + z^2,\ z^4 + x^2,\ x^4 + y^2)$ に対し，$(\mathrm{rot}\boldsymbol{W})(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{0}$ となる $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^3$ をすべて求めよ．

   (3) 関数 $f(\boldsymbol{u}) := x^2 + y^2 - 2x + 6y$ に対し，$\mathrm{grad}(f)(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{0}$ となる $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^3$ をすべて求めよ．

   (4) ベクトル場 $\boldsymbol{U}(\boldsymbol{u}) := (\log(1 + e^{y^3(z^2+1)}),\ \cos(\sin(z^2 + x^3)),\ \sin(\cos(x^4 + y^2)))$ に対し，$\mathrm{div}(\mathrm{rot}\boldsymbol{U})$ を計算せよ．

   (5) $\mathbb{R}^3$ 内の領域 Ω 上のベクトル場 $\boldsymbol{V}$ が $\mathrm{rot}\boldsymbol{V} \neq \boldsymbol{0}$ をみたすとき，$\boldsymbol{V} = \mathrm{grad}(g)$ となるような C^∞ 級関数 $g\colon \Omega \to \mathbb{R}$ は存在しないことを証明せよ．

2. $f(\boldsymbol{u}) := x^2 - y^2 - z^2 - 6x + 4y + 2z + 3$ とし，$S := f^{-1}(0)$ とおく．
   (1) $S \neq \emptyset$ であること，S は曲面であることを示せ．

   (2) $\boldsymbol{v} = (a, b, c) \in S$ に対し，部分ベクトル空間 $T_{\boldsymbol{v}}S \subset \mathbb{R}^3$ を表す方程式を求めよ．（答のみでよい）

   (3) $(3, 2, 1) \in T_{\boldsymbol{w}}^{\perp}S$ となるような $\boldsymbol{w} \in S$ をすべて求めよ．

   (4) $x = k$ で表される $\mathbb{R}^3$ 内の平面を H とする．$H \cap S \neq \emptyset$ となるような k の範囲を求めよ．（答のみでよい）

   (5) S は閉曲面かどうか，理由とともに答えよ．

3. $S^2 := \{\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^3 \mid |\boldsymbol{u}| = 1\}$ とし，$p := (0, 0, -1) \in S^2$, $V := S^2 \setminus \{p\}$ とおく．$(s, t) \in \mathbb{R}^2$ に対し，$(s, t, 0) \in \mathbb{R}^3$ と p を結ぶ直線と V の交点を $\boldsymbol{\varphi}(s, t)$ とおくと，$\boldsymbol{\varphi}\colon \mathbb{R}^2 \to V$ は構成から明らかに全単射である（証明不要）．
   (1) $(s, t) \in \mathbb{R}^2$ に対し，$\boldsymbol{\varphi}(s, t) \in V$ を s, t を用いて表せ．（答のみでよい）

   (2) $(x, y, z) \in V$ に対し，$\boldsymbol{\varphi}^{-1}(x, y, z) \in \mathbb{R}^2$ を x, y, z を用いて表せ．（答のみでよい）

   (3) $3x + 2y + z = 0$ で表される $\mathbb{R}^3$ 内の平面を H とする．$X := \boldsymbol{\varphi}^{-1}(S^2 \cap H) \subset \mathbb{R}^2$ はどのような図形か答えよ．

   (4) $D^3 := \{\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^3 \mid |\boldsymbol{u}| \leq 1\}$ とし，V と $D^3 \cap H$ で囲まれる有界領域を Ω とおく．$\partial\Omega$ の向きを Ω の内部から外部に向かう法ベクトルで定めるとき，$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{u}) := (-x,\ 2y,\ -3z)$ に対し，$\displaystyle\int_{\partial\Omega} \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n}\, d\boldsymbol{S}$ を計算せよ．

4. (1) $\mathbb{R}^3$ 上の任意のベクトル場 $\boldsymbol{V} = (V_i)_{i=1}^3 = (V_1, V_2, V_3)$ と $\boldsymbol{W} = (W_i)_{i=1}^3$ に対し等式

$$\mathrm{rot}(\boldsymbol{V} \times \boldsymbol{W}) = (\mathrm{div}\boldsymbol{W})\boldsymbol{V} + k(\mathrm{div}\boldsymbol{V})\boldsymbol{W} + \big(\boldsymbol{V} \cdot \mathrm{grad}(W_i)\big)_{i=1}^3 + l\big(\boldsymbol{W} \cdot \mathrm{grad}(V_i)\big)_{i=1}^3$$

   が成立するような定数 $k, l \in \mathbb{R}$ を求めよ．（答のみでよい）**ヒント：$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{W}$ の場合を考えよ**

   (2) $\boldsymbol{m}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ を $\boldsymbol{m}(t) := (\cos t, \sin t, 0)$ で定め，以降 $\Omega := \mathbb{R}^3 \setminus \boldsymbol{m}(\mathbb{R})$ とおく．$t \in \mathbb{R}$ と $\boldsymbol{u} \in \Omega$ に対し $\boldsymbol{V}^t(\boldsymbol{u}) := \dfrac{\boldsymbol{u} - \boldsymbol{m}(t)}{|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{m}(t)|^3}$ とおくと，$\boldsymbol{V}^t$ は $t \in \mathbb{R}$ に依存して変化する Ω 上のベクトル場と考えられる．$t \in \mathbb{R}$ を固定したとき，Ω 上の関数 $\mathrm{div}\boldsymbol{V}^t$ を求めよ．（答のみでよい）

   (3) $\boldsymbol{u}_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \Omega$ を固定する．(2) のベクトル場 $\boldsymbol{V}^t$ に対し，$\dfrac{d(f_i \circ \boldsymbol{m})}{dt}(t) = \dfrac{d\boldsymbol{m}}{dt}(t) \cdot \mathrm{grad}(V_i^t)(\boldsymbol{u}_0)$ をみたす関数 $f_i\colon \mathbb{R}^3 \setminus \{\boldsymbol{u}_0\} \to \mathbb{R}$ $(i = 1, 2, 3)$ を求めよ．（答のみでよい）

   (4) $t \in \mathbb{R}$ に依存する Ω 上のベクトル場 $\boldsymbol{W}^t = (W_i^t)_{i=1}^3$ に対し，$\displaystyle\int_a^b \boldsymbol{W}^t(\boldsymbol{u})\, dt := \Big(\int_a^b W_i^t(\boldsymbol{u})\, dt\Big)_{i=1}^3$ と定める．(2) の $\boldsymbol{m}$ と $\boldsymbol{V}^t$ に対し，$\boldsymbol{B}\colon \Omega \to \mathbb{R}^3$ を $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{u}) := \displaystyle\int_0^{2\pi} \boldsymbol{V}^t(\boldsymbol{u}) \times \frac{d\boldsymbol{m}}{dt}(t)\, dt$ で定めるとき，$\mathrm{rot}\boldsymbol{B}$ を計算せよ．

   (5) $n = 1, 2, \ldots$ に対し，周期 1 の正則曲線のパラメータ $\boldsymbol{l}_n\colon \mathbb{R} \to \Omega$ で，$|s| < \dfrac{1}{4}$ のとき $\boldsymbol{l}_n(s) = (0, 0, 4ns)$, また $\dfrac{1}{4} \leq s \leq \dfrac{3}{4}$ のとき $|\boldsymbol{l}_n(s)| \geq n$, $\left|\dfrac{d\boldsymbol{l}_n}{ds}(s)\right| < 8n$ をみたすものが与えられているとする．$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_{\boldsymbol{l}_n} \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{l}_n$ を計算せよ．

   (6) Ω は単連結かどうか，理由とともに答えよ．

配点：15, 15, 15, 15　(**1**: $3 \times 5 = 15$,　**2**: $3 \times 5 = 15$,　**3**: $3 + 3 + 4 + 5 = 15$,　**4**: $1 + 3 + 3 + 3 + 3 + 2 = 15$)