幾何入門 期末試験（2019 年 8 月 2 日）解答例

担当：境 圭一

1. (1) $\boldsymbol{u} = (1,\ 2,\ 3)$.

   (2) $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0},\ \pm\Big(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ \dfrac{1}{\sqrt{2}},\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}\Big)$.

   (3) $\boldsymbol{u} = (1,\ -3,\ z)$ ($z \in \mathbb{R}$ は任意).

   (4) $\mathrm{div}(\mathrm{rot}\boldsymbol{U}) = 0$.

   (5) 対偶を示す．C^∞ 級関数 $g\colon \Omega \to \mathbb{R}$ により $\boldsymbol{V} = \mathrm{grad}(g) = (\partial_x g,\ \partial_y g,\ \partial_z g)$ と表されるとすると，g に関しては偏微分の順序交換が可能だから

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{V} = \begin{pmatrix} \partial_y(\partial_z g) - \partial_z(\partial_y g) \\ \partial_z(\partial_x g) - \partial_x(\partial_z g) \\ \partial_x(\partial_y g) - \partial_y(\partial_x g) \end{pmatrix} = \boldsymbol{0}.$$

2. (1) $f(x,y,z) = (x-3)^2 - (y-2)^2 - (z-1)^2 - 1$ である．$f(2,2,1) = 0$ だから $(2,2,1) \in S$, よって $S \neq \emptyset$.
   $\mathrm{grad}(f)(\boldsymbol{u}) = 2(x-3,\ -y+2,\ -z+1)$ である．これが $\boldsymbol{0}$ となる $\boldsymbol{u}$ は $\boldsymbol{u}_0 := (3,2,1)$ のみだが，$f(\boldsymbol{u}_0) = -1 \neq 0$ だから $\boldsymbol{u}_0 \notin S$. 従って S 上 $\mathrm{grad}(f) \neq \boldsymbol{0}$ だから，S は曲面である．

   (2) $(a-3)x - (b-2)y - (c-1)z = 0$.

   (3) $\boldsymbol{w} = (p,q,r) \in S$ とし，$(3,\ 2,\ 1) \in T_{\boldsymbol{w}}^{\perp}S$ とする．(1) で見たように $\mathrm{grad}(f)(\boldsymbol{w}) \neq \boldsymbol{0}$ だから，$T_{\boldsymbol{w}}^{\perp}S$ の基底として $\dfrac{1}{2}\mathrm{grad}(f)(\boldsymbol{w}) = (p-3,\ -q+2,\ -r+1)$ を取れる．よって $(3,\ 2,\ 1) = k(p-3,\ -q+2,\ -r+1)$ をみたす $k \in \mathbb{R}$ が存在する．$\boldsymbol{w} \in S$ より $(p-3)^2 - (q-2)^2 - (r-1)^2 = 1$ だから $3^2 - 2^2 - 1^2 = k^2$, よって $k = \pm 2$. 従って $\boldsymbol{w} = \Big(\dfrac{9}{2},\ 1,\ \dfrac{1}{2}\Big)$ または $\Big(\dfrac{3}{2},\ 3,\ \dfrac{3}{2}\Big)$.

   (4) $k \leq 2$ または $4 \leq k$.

   (5) $R > 0$ を任意に取る．(4) より，$k \geq 4$ かつ $k \geq R$ となる k に対し，$\boldsymbol{v} = (k,y,z) \in S$ となる $\boldsymbol{v}$ が存在する．$|\boldsymbol{v}| \geq k \geq R$ だから，この $\boldsymbol{v}$ は $U(\boldsymbol{0};R) = \{\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^3 \mid |\boldsymbol{u}| < R\}$ に含まれない．よって $S \not\subset U(\boldsymbol{0};R)$ となる．このことから S は有界でなく，従って S は閉曲面ではない．

3. (1) $\boldsymbol{\varphi}(s,t) = \dfrac{(2s,\ 2t,\ 1-s^2-t^2)}{1+s^2+t^2}$.

   (2) $\boldsymbol{\varphi}^{-1}(x,y,z) = \dfrac{(x,\ y)}{1+z}$.

   (3) $(s,t) \in X$ とすると $\boldsymbol{\varphi}(s,t) \in H$ であるから

$$3 \cdot \frac{2s}{1+s^2+t^2} + 2 \cdot \frac{2t}{1+s^2+t^2} + \frac{1-s^2-t^2}{1+s^2+t^2} = 0, \qquad \text{整理すると} \qquad (s-3)^2 + (t-2)^2 = 14 \qquad (*)$$

   を得る．$(*)$ が表す円を C とおけば $X \subset C$ がわかる．
   逆に $(s,t) \in C$ とすると，上の計算を逆にたどって $\boldsymbol{\varphi}(s,t) \in H$ がわかる．従って $(s,t) \in \boldsymbol{\varphi}^{-1}(H \cap V) = X$ となるから $C \subset X$. よって X は $(*)$ が表す円である．

   (4) $\boldsymbol{V}$ は $\mathbb{R}^3$ 上で定義され，$\overline{\Omega} \subset \mathbb{R}^3$ である．$\partial\Omega$ の向きの定め方から，Gauss の発散定理により

$$\int_{\partial\Omega} \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n}\, d\boldsymbol{S} = \int_{\Omega} \mathrm{div}\boldsymbol{V}\, dxdydz = -2\int_{\Omega} dxdydz = -2 \cdot (\Omega \text{ の体積}).$$

   H が原点を通ることから，Ω の体積 $= \dfrac{1}{2} \cdot (D^3$ の体積$)$ である（図 1 参照）．よって求める積分値は $-\dfrac{4\pi}{3}$.

4. (1) $k = l = -1$.

   (2) $\mathrm{div}\boldsymbol{V}^t = 0$.

   (3) $f_1(\boldsymbol{u}) = \dfrac{x - x_0}{|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_0|^3},\ f_2(\boldsymbol{u}) = \dfrac{y - y_0}{|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_0|^3},\ f_3(\boldsymbol{u}) = \dfrac{z - z_0}{|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_0|^3}$.

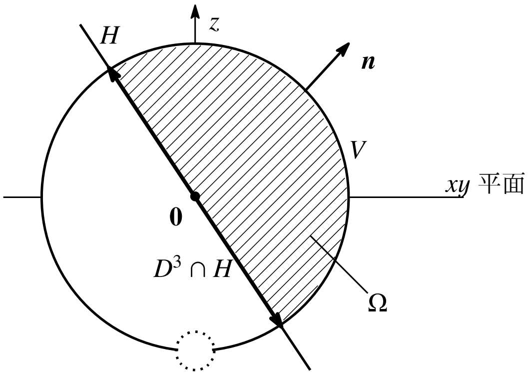

図 1　問題 3

(4) 一般に，$\boldsymbol{W}^t$ が t に依存するベクトル場であるとき，$\mathrm{rot}\displaystyle\int_a^b \boldsymbol{W}^t(\boldsymbol{u})\,dt$ の第 1 成分は

$$\partial_y \int_a^b W_3^t(\boldsymbol{u})\,dt - \partial_z \int_a^b W_2^t(\boldsymbol{u})\,dt = \int_a^b ((\partial_y W_3^t)(\boldsymbol{u}) - (\partial_z W_2^t)(\boldsymbol{u}))\,dt$$

である．第 2, 第 3 成分についても同様だから

$$\mathrm{rot}\int_a^b \boldsymbol{W}^t(\boldsymbol{u})\,dt = \int_a^b (\mathrm{rot}\boldsymbol{W}^t)(\boldsymbol{u})\,dt.$$

$\boldsymbol{W}^t = \boldsymbol{V}^t \times \dfrac{d\boldsymbol{m}}{dt}(t)$ の場合，$\dfrac{d\boldsymbol{m}}{dt}(t)$ が $\boldsymbol{u}$ によらないので $\mathrm{rot}\dfrac{d\boldsymbol{m}}{dt}(t) = \mathrm{grad}\dfrac{d\boldsymbol{m}}{dt}(t) = \mathbf{0}$. これと (1), (2), (3) から

$$\mathrm{rot}\Big(\boldsymbol{V}^t \times \frac{d\boldsymbol{m}}{dt}(t)\Big) = -\Big(\frac{d\boldsymbol{m}}{dt}(t)\cdot \mathrm{grad}(V_i^t)\Big)_{i=1}^3 = -\Big(\frac{d(f_i\circ \boldsymbol{m})}{dt}(t)\Big)_{i=1}^3$$

である．よって $(\mathrm{rot}\boldsymbol{B})(\boldsymbol{u})$ の第 i 成分は

$$-\int_0^{2\pi} \frac{d(f_i\circ\boldsymbol{m})}{dt}(t)\,dt = -f_i(\boldsymbol{m}(2\pi)) + f_i(\boldsymbol{m}(0)) = f_i(\boldsymbol{m}(0)) - f_i(\boldsymbol{m}(0)) = 0,$$

従って $\mathrm{rot}\boldsymbol{B} = \mathbf{0}$.

(5) $|s| < \dfrac{1}{4}$ のとき $\dfrac{d\boldsymbol{l}_n}{ds}(s) = (0, 0, 4n)$ だから，$\boldsymbol{B} = (B_i)_{i=1}^3$ とおけば $\displaystyle\int_{-1/4}^{1/4} \boldsymbol{B}(\boldsymbol{l}_n(s))\cdot\frac{d\boldsymbol{l}_n}{dt}(s)\,ds = 4n\int_{-1/4}^{1/4} B_3(\boldsymbol{l}_n(s))\,ds$ である．$\boldsymbol{m}(t) = (m_i(t))_{i=1}^3 = (\cos t,\ \sin t,\ 0)$ とおけば

$$B_3(\boldsymbol{l}_n(s)) = \int_0^{2\pi}\Big(V_1^t(\boldsymbol{l}_n(s))m_2'(t) - V_2^t(\boldsymbol{l}_n(s))m_3'(t)\Big)\,dt = \frac{-1}{(1+(4ns)^2)^{3/2}}\int_0^{2\pi} dt = \frac{-2\pi}{(1+(4ns)^2)^{3/2}},$$

よって

$$\int_{-1/4}^{1/4} \boldsymbol{B}(\boldsymbol{l}_n(s))\cdot\frac{d\boldsymbol{l}_n}{dt}(s)\,ds = -16\pi n\int_0^{1/4}\frac{ds}{(1+(4ns)^2)^{3/2}} = -4\pi\sin\alpha,$$

ただし $\tan\alpha = n$ となる $\alpha\in(0,\pi/2)$ を取った．$n\to+\infty$ のとき $\alpha\to\pi/2$ であることに注意しておく．
一方，$\dfrac{1}{4}\le s\le\dfrac{3}{4}$ のとき $|\boldsymbol{l}_n(s)| > n$ で，n が十分大きければ $|\boldsymbol{m}(t)| = 1 < n$, また $\left|\dfrac{d\boldsymbol{m}}{dt}\right| = 1$ だから

$$\left|\boldsymbol{V}^t(\boldsymbol{l}_n(s))\times\frac{d\boldsymbol{m}}{dt}(t)\right| \le \left|\boldsymbol{V}^t(\boldsymbol{l}_n(s))\right|\cdot\left|\frac{d\boldsymbol{m}}{dt}(t)\right| = \frac{1}{|\boldsymbol{l}_n(s)-\boldsymbol{m}(t)|^2} < \frac{2}{n^2}.$$

従って $|\boldsymbol{B}(\boldsymbol{l}_n(s))| \le \displaystyle\int_0^{2\pi}\left|\boldsymbol{V}^t(\boldsymbol{l}_n(s))\times\frac{d\boldsymbol{m}}{dt}(t)\right|dt < \frac{4\pi}{n^2}$ がわかり，$\dfrac{1}{4}\le s\le\dfrac{3}{4}$ において $\left|\dfrac{d\boldsymbol{l}_n}{dt}(s)\right| < 8n$ だから

$$\left|\int_{1/4}^{3/4}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{l}_n(s))\cdot\frac{d\boldsymbol{l}_n}{ds}(s)\,ds\right| \le \int_{1/4}^{3/4}\left|\boldsymbol{B}(\boldsymbol{l}_n(s))\cdot\frac{d\boldsymbol{l}_n}{ds}(s)\right|ds < \frac{16\pi}{n}$$

を得る．よって $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_{1/4}^{3/4}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{l}_n(s))\cdot\frac{d\boldsymbol{l}_n}{ds}(s)\,ds = 0$ だから

$$\lim_{n\to\infty}\int_{l_n}\boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{l}_n = \lim_{n\to\infty}(-4\pi\sin\alpha) = -4\pi.$$

(6) (5) より，n が十分大きければ $\displaystyle\int_{\boldsymbol{l}_n} \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{l}_n \neq 0$ である．よって $\boldsymbol{B} = \mathrm{grad}(f)$ となる関数 $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ は存在しない．これと (4) より，Ω は単連結ではあり得ない．

補足．

1. (1)〜(3) はそれぞれ $(\mathrm{div}\boldsymbol{V})(\boldsymbol{u}) = (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2$, $(\mathrm{rot}\boldsymbol{W})(\boldsymbol{u}) = 2(y-2z^3,\ z-2x^3,\ x-y^3)$, $\mathrm{grad}(f)(\boldsymbol{u}) = 2(x-1,\ y+3,\ 0)$ であることを使う．(2) は式の対称性から，求める x, y, z は $x = y = z$ をみたすはずであることに気づけば楽になる．(4) はまともに計算してはダメで，一般に 3 次元ベクトル $\boldsymbol{U}$ が C^∞ 級なら $\mathrm{div}(\mathrm{rot}\boldsymbol{U}) = 0$（演習 13, 14 参照）．(5) では Ω の単連結性が仮定されていないので，定義通り計算するしかない．(4), (5) とも C^∞ 級関数については偏微分の順序交換が可能であることが大切（実際には C^2 級くらいで十分だが）．
2. S は二葉双曲面 $x^2 - y^2 - z^2 = 1$ を $(3, 2, 1)$ だけ平行移動して得られる曲面．(1)〜(3) は演習 9-1, 演習 10-1, レポート 9, 10 などと同様．(4) の切り口は $(y-2)^2 + (z-1)^2 = (k-3)^2 - 1$ で表され，これが $\emptyset$ でないための必要十分条件は $(k-3)^2 - 1 \geq 0$ である（このとき，切り口は 1 点または円である）．閉曲面とは有界かつ $\mathbb{R}^3$ の閉集合であるような曲面のことだった．S は有界ではないが $\mathbb{R}^3$ の閉集合ではある．
3. (1)〜(3) は演習 8-1, レポート 8 と同様の問題．(4) の $\partial\Omega$ は曲面ではないが，この状況では Gauss の発散定理は適用可能である．平面上の閉曲線が囲む領域の場合の証明を見ると，曲線が区分的に正則であれば証明は問題なく進むことがわかる．この問題の場合もそれに当たる．
4. $\mathbb{R}^3$ のある領域が単連結なら，その上のベクトル場 $\boldsymbol{V}$ について，$\mathrm{rot}\boldsymbol{V}$ が恒等的に $\boldsymbol{0}$ であることと $\boldsymbol{V}$ のポテンシャルの存在は同値である．この問題の Ω 上では，(4), (5) より $\mathrm{rot}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{0}$ だがポテンシャルを持たない $\boldsymbol{B}$ があるので，Ω は単連結ではない．このことを示す問題で，教科書の §3.3 あたりの内容を参考にした．かなり誘導はしてあるが，時間内にすべて解くのは苦しいかもしれない．しかし一方で (1)〜(3) はさほど計算を必要とせず，講義中にやった内容も含むので，ある程度点を取れるのではないかと思う．

   (1) の等式を成り立たせる k, l があると仮定し $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{W}$ の場合を考えると，$\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{V} = \boldsymbol{0}$ だから，右辺も $\boldsymbol{0}$ でなければならない．すると $k = l = -1$ しかなさそうだということはすぐにわかるだろう．もちろん，このときに等式が本当に成立することを示すには両辺を計算するしかないが，それは問題では要求されていない．(2) は演習 12-2 (3) と同様である．(2) や (3) の div や grad の計算に関しては t は定数であることに注意．(3) は合成関数 $f\circ\boldsymbol{\varphi}\colon \mathbb{R} \xrightarrow{\boldsymbol{\varphi}} \mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ の導関数が

   $$\frac{d(f\circ\boldsymbol{\varphi})}{dt}(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(\boldsymbol{\varphi}(t))\frac{d\varphi_k}{dt}(t) = \mathrm{grad}(f)(\boldsymbol{\varphi}(t))\cdot\frac{d\boldsymbol{\varphi}}{dt}(t)$$

   であったことを思い出すとよい．(5) では $\dfrac{1}{4} \leq s \leq \dfrac{3}{4}$ においては $\left|\boldsymbol{V}^t(\boldsymbol{l}_n(s))\right|$ が小さくなることから $|\boldsymbol{B}(\boldsymbol{l}_n(s))|$ も小さくなり，結果として $\boldsymbol{l}_n\left(\left[\dfrac{1}{4}, \dfrac{3}{4}\right]\right)$ に沿った $\boldsymbol{B}$ の線積分が小さくなる，という評価が難しいだろう．これを自力でできれば自信を持っていいと思う．素朴に $\boldsymbol{l}(s) = (\cos(s)+1,\ 0,\ \sin(s))$ のような閉曲線に沿って積分したいところだが，それではうまくいかないようである．

   Ω 内の閉曲線 $\boldsymbol{l}$ に対し，$-\dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_{\boldsymbol{l}} \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{l}$ を $\boldsymbol{l}$ と $\boldsymbol{m}$ の**絡み数** (linking number) とよぶ．この問題の $\boldsymbol{l}_n$ の場合，実は $\boldsymbol{m}$ との絡み数は n によらず 1 に等しい．絵を描いてみると，$\boldsymbol{l}_n$ が $\boldsymbol{m}$ のまわりを「1 周」していることがわかる．絡み数が 0 でないことは，$\boldsymbol{l}_n$ を連続的に変形して $\boldsymbol{m}$ との「絡まり」を解消することは（途中で $\boldsymbol{m}$ とぶつかるような変形をしない限り）不可能であることを示している．絡み数は幾何（トポロジー）の一分野である**結び目理論** (knot theory) において非常に重要な量であるが，一方でこの問題 4 は電磁気学に由来するものである．教科書 §3.3 を参照せよ．比較的新しい分野である結び目理論の背景に，歴史の長い電磁気学があるというのは興味深い．

配点：15, 15, 15, 15　(**1**: $3\times 5 = 15$,　**2**: $3\times 5 = 15$,　**3**: $3+3+4+5 = 15$,　**4**: $1+3+3+3+3+2 = 15$)