

2019 年度 幾何入門 期末試験 結果

担当：境 圭一

平均点は 24.8 点，最高点は 42 点でした．人数分布は以下の通りです：

点数	～ 15	16 ～ 20	21 ～ 25	26 ～ 30	31 ～ 35	36 ～ 40	42
18S	3	7	17	14	9	3	1
18S 以外	2	3	6	5	0	0	0

問題ごとの平均点は以下の通りです．4(3)～(6) は小数点以下 2 位で丸めて 0.0 点です．

問題	1					2					3				4		計
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(1)	(2)	(3)	(4)	(1)	(2)	
18S	2.9	1.5	2.3	2.9	2.5	2.5	2.6	2.2	1.8	0.4	1.1	0.6	0.1	0.4	0.6	1.1	25.5
他	2.5	0.9	1.8	2.5	1.9	1.9	1.7	1.7	1.1	0.3	0.4	0.3	0.2	0.4	0.3	0.5	18.0

答案用紙 No. 1 の右上に赤で書いてあるのが期末試験の点数，青はレポート 1～14 の点数の合計 (+2)\*1 です（最大 30 点）．また，○で囲ったアルファベットは最終的な成績です：

S : 「秀」, A : 「優」, B : 「良」, C : 「可」, F : 「不可」

大問ごとの点数は各用紙の右下または裏面に書いてあります．

最終的な成績の分布は以下の通りです．平均点は 63.5 点，最高点は 102 点でした．

成績	不可 (F)	可 (C)	良 (B)	優 (A)	秀 (S)
18S	18	21	8	5	4
18S 以外	10	5	4	0	0

不可の人は e-alps をご覧ください．

問題 1, 2 は多くが昨年と同様でした．試験を乗り切る手段を身につけても仕方ないのですが，そうは言っても試験前には当然過去の問題を見つめるはずで．問題 1, 2 を出来なかった人は，当然やるべきことをやらなかったか，やったとしても内容をしっかり消化できていなかったのだと思います．また問題 3 (1)～(3) はレポート問題 8 と同様で，このレポートの出来がよくなかったので取り上げてみました．出来なかった人は，一度やって出来なかったところを復習していないか，やったとしても内容をしっかり消化できていなかったのだと思います．ある内容をわかっているかどうかは自分が一番よくわかっているはずで，わかっていることはしっかり向き合って考えるという姿勢が大切です．それには時間がかかりますが，そうしなければ結局は遠回りです．また 1 人でやるのはつらいので，友人や先輩，教員などに適切に頼るべきです．

また，基本的な計算力が不足している感じもしました．問題 1 (2) や問題 2 (3) の出来の悪さに如実に表れているように思います．論理的な体系の理解が最も重要であるとは思いますが，そうは言っても計算ができなければ先に進めないこともあります．手を動かすことを厭わないことは大切です．このことと，板書をノートに手書きせず写真に撮ってしまう風潮は関係あるのでしょうか．

以下，問題ごとのコメントです．

1. (3)  $\mathbb{R}^3$  の点を求めよと問われているのですから，“(1, -3)” は明らかに誤りです．

(5) 細かいことですが，「 $\Omega$  上にベクトル場  $V$  がある」…(\*) という状況は前提ですから，対偶を

「 $V$  がポテンシャルを持つ  $\implies \Omega$  上のベクトル場  $V$  が  $\text{rot}V = \mathbf{0}$  をみたす」

と書くのは変です ( $V$  の説明は “ $\implies$ ” の前に入っているべき)．単に

\*1 レポートは 各回 2 点  $\times$  14 回 ですが，30 点分つけると最初に宣言しましたので，中間・期末試験を両方受験した人には +2 点つけました

「 $V$  がポテンシャルを持つ  $\implies \text{rot}V = \mathbf{0}$ 」

でよいと思います。

2. (1)  $S \neq \emptyset$  と、 $\text{grad}(f)$  が  $S$  上  $\mathbf{0}$  にならないことを確認すればよいのですが、この 2 つの議論が混在している答案が多数あります。例えば

(適切でない)  $\text{grad}(f)(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$  となる  $\mathbf{u} = (3, 2, 1)$ . ここで  $f(2, 2, 1) = 0$  より  $S \neq \emptyset$ .  
また  $f(3, 2, 1) = -1 \neq 0$  だから  $S$  上  $\text{grad}(f) \neq \mathbf{0}$

のような答案です。「ここで… $S \neq \emptyset$ 」のところだけ別のことを話題にしているわけで、聞いているほうは急に話が飛んで困惑することでしょう。

(2) “ $(x-3)a - (y-2)b - (z-1)c = 0$ ” のような答案は誤りです。文字の混同が起っています。

(4) 「切り口は円である」という答案があったのですが、それは  $(k-3)^2 - 1 > 0$  の場合です。 $(k-3)^2 = 1 = 0$  でも  $H \cap S \neq \emptyset$  ではあって、このとき  $H \cap S$  は 1 点です。“ $H \cap S = \emptyset$ ” と混同したらしい “ $2 < k < 4$ ” という答案がたくさんありました。

(5)  $S$  は非有界なので閉曲面ではありません。「非有界である」ことをきちんと説明できている人は多くありませんでした。「曲面が無限に続いているから」というような解答は惜しいのですが、数学的に正確に述べられるようにしてください。

3. 状況を把握できていない人が多いようです。重要なのは  $V$  は  $p$  のところに「穴」が空いていること、 $H$  は  $S^2$  の中心である原点を通っていることです。従って  $\Omega$  は  $D^3$  の「半分」になっています。

4. 問題 1~3 とは違って、ある程度込み入った内容を扱いました。時間制限のある中では難しいと思いますが、内容は興味あるものだと思います (教科書 §3.3 参照)。物理的な背景も合わせて、時間をかけてじっくり考えてみてください。

採点には万全を期しましたが、万が一誤りがあると思われる場合は、成績を確定させる予定の 8/19 (月) までに申し出てください。答案は全てコピーを取り保存していますので、ただちに調べます。

#### まとめ、今後の展望

今後学ぶ数学のほとんどは、何らかの意味で、線形代数または微分積分 (または両方) を発展させたものです。この講義で扱った内容 (ベクトル解析) はその発展のスタート地点のような位置づけです。1 変数関数  $\mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$  の一般化であるベクトル場  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  に対し、微分の一般化として  $\text{grad}, \text{div}, \text{rot}$  といった作用素を、積分の一般化として線・面積分を定義しました。これらは (i) 力学や電磁気学などに由来し、(ii) 微分積分学の基本定理の拡張と言える Gauss の発散定理や Stokes の定理が成り立つ、という 2 つの理由により、正当な一般化であると言えます。また曲線の接線や曲面の接平面を関数の 1 次近似として捉えることで、Taylor 展開の幾何学的意味がある程度明確になりました。接線や接平面はベクトル空間なので、幾何学に線形代数を適用するための足掛かりとなります。

この講義では目に見える 3 次元までに絞った話をしました。絵を描けるので直観的に理解しやすい一方で、次元が本質的に意味を持つのか否か、わかりにくくなる危険もあります。本当は「線積分 (その 2)」「面積分」と呼んだものは同一のもので、一般に  $\mathbb{R}^n$  内の  $n-1$  次元多様体 (曲線・曲面の一般化) に対して考えられることです。そのことが推察されるように、曲面と曲線、上記 2 種類の積分の共通点を強調して話すよう試みました。また一般の次元で定義できる概念 ( $\text{div}, \text{grad}, \dots$ ) については、可能な限り一般の次元で定義を行いました。なお、 $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$  の外積  $\mathbf{u} \times \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$  は  $\mathbb{R}^3$  特有のものではありませんが、実は外積の一般化として、 $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{n-1} \in \mathbb{R}^n$  に対し「外積」 $[\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{n-1}] \in \mathbb{R}^n$  が定まり、 $n=3$  のときは外積に一致し、 $n \geq 4$  でも  $n=3$  のときと類似した性質が成り立ちます。詳しくは、例えば「解析入門 II」(杉浦光夫, 東大出版) p. 58 などをご覧ください。

微積分の基本定理が高次元化されたのはいいとして、その結果として何が嬉しいのか、というのは、例えば電磁気学や多様体論、トポロジーなど今後の講義の中で明らかになっていくと思います。この講義では  $\mathbb{R}^3$  内の閉曲線の絡み数について少し触れましたが、そのような進んだ内容も大抵は線形代数や微積分の内容を基にしています。幾何学に関する分野について言えば、だいたいのアイデアはベクトル解析の中に詰まっているようにも思えます。今後いろいろ

ろな講義を学んだあとでベクトル解析の内容を振り返ると、そこで初めて意味が分かる内容もあるかもしれません。今後の講義を注意深く見ていってください。数学は積み上げの学問である、というようなことはよく耳にしますが、よく見ていけば縦横にいろいろなつながりを見つけられるはずです。「学際」は数学の中だけで既に始まっています。

(8/5)