2019 年度 線形代数学 I（生物学コース・物質循環学コース）演習問題 1

担当：境 圭一

1. 4 項ベクトル $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ のなす角を求めよ．
2. 教科書の命題 1.1, 命題 1.2 を証明せよ．
3. 教科書の命題 1.3 (1), (2) を証明せよ．Cauchy-Schwarz の不等式の証明の中で，教科書の命題 1.3 (1), (2) を使っている箇所を探せ．

補足．大学数学は高校数学よりずっと抽象的なものになります．具体的な計算を自分でやってみないと，何をやっているのかわからなくなることもあると思います．教科書の演習問題や市販の演習書，この演習問題などを利用して，なるべくたくさん手を動かして計算してみてください．やっていくうちに身につく計算のコツのようなものもあると思います．
この「補足」では，講義では時間の都合で話せないが重要であると思われることなどを補足していきたいと思います．ここにも書いていないことで不明な点があれば，講義時間内外を問わず質問してほしいと思います．どんな講義でも，**わからないことをそのままにしない**ことが肝心です．

(i) 高校でも，一般的な平面ベクトルを文字を使って表したいときに $\overrightarrow{u} = (a, b)$ のような書き方をしたと思います．今後の講義では一般の n 項ベクトルを扱いますが，例えば $n = 100$ かもしれず，そのようなときに文字数が足りなくなるのを防ぐため，$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ のような記号を使ったりします．これなら，いくら n が増えようとも，添え字の数を増やせば大丈夫です．数列の記号と同じですが，気分としては数列を考えているわけではありません．ベクトルを縦に書くのは，そのほうが和や内積の計算が容易だからです．これはやってみるとすぐ実感できます．

(ii) 4/10 の講義で，n 項ベクトルの内積を次のように定義しました：

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \quad \text{のとき} \quad \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} := a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k.$$

“ $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} := \cdots$ ” は「$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ を…のように定義する」の意味です．高校では和の記号は上のように $k = 1$ から n まで，とすることが多かったと思いますが，ここで k を使うことに重要な意味はなく，今後は i や m など他の文字を使うことも多々あります．例えば上の内積を $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i b_i$ と書いても全く同じ意味です．i は虚数単位と紛らわしいかもしれませんが，この講義ではなるべく虚数単位を $\sqrt{-1}$ で表すことにし，i は単なる文字とします．

(iii) 同じものが複数の記法で表される，というのは（恐らく数学以外でも）よくあることです．例えば教科書ではベクトルの長さを $\|\boldsymbol{u}\|$ と表していますが，この講義では $|\boldsymbol{u}|$ にしています（縦線をたくさん書くのが面倒だから）．また，教科書ではベクトルの内積を $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ と表していますが，これは座標などの他の記号と紛らわしいと思うので，この講義では $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}$ と表そうと思います．状況によってそれぞれの記法に一長一短があり，どれがいいというものではありません．レポートや試験の答案を書くとき，**それが何を表すのか明確でありさえすれば，**板書とは異なる記法を採用しても構いません．ただしその場合は，混乱を招かないために，世間で一般的に使われる記法から大きく外れないようにすべきです．ベクトルの長さ $|\boldsymbol{u}|$ は，多くの教科書で見られる一般的な記法です．

(iv) 1 項ベクトル (x_1) とスカラー x_1 はしばしば同一のものとみなします．大抵は特に問題は起こらないのですが，明確に区別すべき場面もあり得ます．そのような場面に出会ったときに説明したいと思います．