2019 年度 線形代数学 I（生物学コース・物質循環学コース）演習問題 2

担当：境 圭一

1. 以下の行列について，和や積が定義できる組をすべて見つけ出し，和や積を計算せよ．

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix},\quad B = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ 2 & -3 \end{pmatrix},\quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \\ -3 & 1/2 \end{pmatrix},\quad D = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -\pi & 1 \end{pmatrix},\quad F = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix},\quad G = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 3 \\ -1 & \log 2 & 0 \end{pmatrix}$$

2. A を $l \times m$ 行列（※ “ l ” は小文字のエルです），B を $m \times n$ 行列とする．このとき積 AB が定義される．

(1) A の第 i 行 $(1 \le i \le l)$ を m 項横ベクトル $\boldsymbol{a}'_i$ で表し $A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}'_1 \\ \boldsymbol{a}'_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}'_l \end{pmatrix}$ と表すとき，積 $\boldsymbol{a}'_i B$ が定義され，$AB = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}'_1 B \\ \boldsymbol{a}'_2 B \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}'_l B \end{pmatrix}$ が成り立つことを示せ．

(2) B の第 j 列 $(1 \le j \le n)$ を m 項縦ベクトル $\boldsymbol{b}_j$ で表し $B = \begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 & \cdots & \boldsymbol{b}_n \end{pmatrix}$ と表すとき，積 $A\boldsymbol{b}_j$ が定義され，$AB = \begin{pmatrix} A\boldsymbol{b}_1 & A\boldsymbol{b}_2 & \cdots & A\boldsymbol{b}_n \end{pmatrix}$ が成り立つことを示せ．

補足． 今回登場した**行列** (matrix) は，この講義（線形代数学 I）と，後期に学ぶ線形代数学 II において主役となるものです．行列の和・スカラー倍・積はこの講義の基本となるものですから，たくさん練習して慣れてほしいと思います．

(i) 多くの用語が出てきて大変ですが，具体例を通して覚えるといいでしょう．例えば今回の問題 1 の A について，
- A は 2 行 3 列からなる行列です．講義では「2×3 行列」という言い方をしています．
- 第 1 行は $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, 第 2 行は $\begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ で，これらは 3 項横ベクトルとも見なせます．これら 2 つの 3 項横ベクトルを縦に並べたものが A である，と考えることもできます．
- 第 1 列は $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$, 第 2 列は $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, 第 3 列は $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ で，これらは 2 項縦ベクトルとも見なせます．これら 3 つの 2 項縦ベクトルを縦に並べたものが A である，と考えることもできます．
- A の $(2,1)$ 成分（2 行 1 列成分）は -2, また $(1,3)$ 成分は 0 です．練習として，すべての (i,j) 成分 ($i = 1,2$, $j = 1,2,3$) を列挙してみてください．

(ii) 行列の和・スカラー倍は，おおむね実数やベクトルの和・スカラー倍と同様に計算できます．$A + B$ が定義されるのは A, B のサイズが同じときに限ります．そうでないとき $A + B$ は定義しません．これはベクトルでも同じです．今まで平面ベクトルと空間ベクトルの和を考えたことはないはずです．

(iii) 行列の積の定義はかなり複雑で，覚えるのも大変です．慣れるにはたくさん計算するしかありません．積 AB が定義されるのは，A の列の数と，B の行の数が等しい場合に限ります．そうでないとき AB は定義しません．AB, BA が両方定義される場合でも，**一般には $AB \neq BA$ である**，という点には注意が必要です．一方，$(AB)C$ が定義される場合は $A(BC)$ も定義され，$(AB)C = A(BC)$ が成り立ちます（これについては下で改めて述べます）．この意味では積の順序は自由です．

行列の積をなぜこのように定義するのか，最初は疑問に思うことでしょう．講義が進むにつれ，この定義がいかに理に適ったものかがわかってくるはずです（そう信じたい）．まずは，ベクトルの内積がたくさん集まったようなものだ，と考えるといいかもしれません．つまり，今回の問題 2 のような状況のとき，AB は $l \times n$ 行列となり，その (i,j) 成分は $\boldsymbol{a}'_i$ と $\boldsymbol{b}_j$ の内積です．

(iv) 零行列 O は文字通り数字のゼロに対応するもので，教科書の命題 1.6 (3), (4) や命題 1.8 (1) はそのことを示していると言えます．次回以降の講義で，数字の 1 に対応する特別な行列を導入します．これは**単位行列** (unit matrix) とよばれ，教科書では E で表されます．そのため，今回の問題 1 では E を使いませんでした．

(v) 今回の問題 2 は，いきなり一般の l, m, n で考えるのは大変かもしれません．例えば $l = 2$, $m = n = 3$ くらいで考えてみるのも手でしょう．具体的な数字を入れて計算をしてみると，一般の場合のやり方が見えてくる，というのはよくあることです．

(iii) で述べた “$(AB)C = A(BC)$” について，教科書で省略されている証明を与えておきます．

$A = (a_{ij})$ が $l \times m$ 行列，$B = (b_{ij})$ が $m \times n$ 行列，$C = (c_{ij})$ が $n \times p$ 行列のとき，$(AB)C$ と $A(BC)$ はどちらも定義され

て $l \times p$ 行列になります．これらの (i, j) 成分を比較しましょう．
まず AB の (i, k) 成分を d_{ik} とおくと

$$d_{ik} = \sum_{s=1}^{m} a_{is} b_{sk}$$

です．よって $(AB)C$ の (i, j) 成分は

$$\sum_{k=1}^{n} d_{ik} c_{kj} = \sum_{k=1}^{n} \Big(\sum_{s=1}^{m} a_{is} b_{sk} \Big) c_{kj} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{s=1}^{m} a_{is} b_{sk} c_{kj} \qquad (*)$$

です．カッコを外していいのは，積の分配法則によります．
同様に，BC の (s, j) 成分を f_{sj} とおくと

$$f_{sj} = \sum_{k=1}^{n} b_{sk} c_{kj}$$

ですから，$A(BC)$ の (i, j) 成分は

$$\sum_{s=1}^{m} a_{is} f_{sj} = \sum_{s=1}^{m} a_{is} \Big(\sum_{k=1}^{n} b_{sk} c_{kj} \Big) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{s=1}^{m} a_{is} b_{sk} c_{kj} \qquad (**)$$

です．いろいろな順序を変えていいのは，積の分配法則と，実数の和が順序に関係しないことによります．$(*)$ と $(**)$ を比較すると，$(AB)C$ と $A(BC)$ の (i, j) 成分は等しいことがわかります．