2019 年度 線形代数学 I（生物学コース・物質循環学コース）演習問題 3

担当：境 圭一

1. $A=\begin{pmatrix}1&2&0\\-3&0&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-2&1\\1&4\\0&1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1&0\\-3&2\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}6&2\\1&0\end{pmatrix}$, $R=\begin{pmatrix}\sqrt{3}&-1\\1&\sqrt{3}\end{pmatrix}$, $S=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$ とおく．
   (1) AB, BA を計算し結果を比較せよ．
   (2) (1) と同様に，CD と DC, RS と SR を比較せよ．
   (3) $(AB)C=A(BC)$ であること，$(BC)A=B(CA)$ であることを，実際に計算して確かめよ．
   (4) $(CD)(RS)=((CD)R)S=C(DR)S$ などが成り立つことを，実際に計算して確かめよ．
2. n 次単位行列を E_n で表す．A を $l\times m$ 行列とするとき，$AE_m=A$, $E_lA=A$ であることを示せ．
3. $\theta\in\mathbf{R}$ $(0\le\theta<2\pi)$ に対し，$R_\theta=\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}$ とおく．$\boldsymbol{u}=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ を平面ベクトルとするとき，
   (1) $R_\theta\boldsymbol{u}$ を計算せよ．
   (2) $|R_\theta\boldsymbol{u}|=|\boldsymbol{u}|$ であることを示せ．また $R_\theta\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{u}$ のなす角は θ または $2\pi-\theta$ であることを示せ．
   (3) $R_\theta\boldsymbol{u}$ は，$\boldsymbol{u}$ を反時計回りに角度 θ だけ回転して得られるベクトルであることを示せ．
   (4) $\alpha,\beta\in\mathbf{R}$ とする．(3) の幾何学的意味を考えることにより，$R_\alpha R_\beta=R_{\alpha+\beta}$ であること，$R_\alpha R_\beta=R_\beta R_\alpha$ であることを（行列の積を計算することなく）示せ．
   (5) (4) の行列の積を具体的に計算することで，三角関数の加法定理を示せ．

補足． $m\times n$ 行列 $A=\left(a_{ij}\right)_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}}$ を n 項縦ベクトル（$n\times 1$ 行列）$\boldsymbol{x}$ に左からかけた結果は m 項縦ベクトル（$m\times 1$ 行列）で，具体的には

$$A\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n\\\vdots\\a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n\end{pmatrix}\qquad(*)$$

になります（確かめてみてください）．$\boldsymbol{x}$ を「変数」とみなすとき，計算結果は $\boldsymbol{x}$ の成分に関して（定数項が 0 の）1 次式になっています．このように，ベクトルに行列をかけて別のベクトルに変換する操作を **1 次変換**または**線形変換**などとよびます．これについては後期の「線形代数学 II」で詳しく学びます．
今回の問題 3 は $m=n=2$ の場合です．2×2 行列を左からかけることは，平面ベクトルを別の平面ベクトルにうつす 1 次変換を表します．特に R_θ は原点を中心として反時計回りに角度 θ だけ回転する変換です．このように幾何学的な視点で捉えると，三角関数の加法定理を証明すること，記憶することはとても容易になると思います．旧指導要領では数学 C で学んでいた内容であることを知っている人もいるかもしれません．学ぶ量を増やすことで逆に理解しやすくなることもある，という例ではないかと思います．また，このように話がうまくいくことを見ると，なんだかよくわからなかった行列の積にきちんとした意味がありそうな気がしてきます．

$(*)$ の A の第 j 列を $\boldsymbol{a}_j=\begin{pmatrix}a_{1j}\\a_{2j}\\\vdots\\a_{mj}\end{pmatrix}$ とおき $A=\begin{pmatrix}\boldsymbol{a}_1&\boldsymbol{a}_2&\cdots&\boldsymbol{a}_n\end{pmatrix}$ と表すと，上の $(*)$ は

$$A\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{a}_1&\boldsymbol{a}_2&\cdots&\boldsymbol{a}_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=x_1\boldsymbol{a}_1+\cdots+x_n\boldsymbol{a}_n=\sum_{k=1}^{n}x_k\boldsymbol{a}_k$$

と書くこともできます．これは $m\times n$ 行列と $n\times 1$ 行列の積ではありますが，見た目としては $1\times n$ 行列と $n\times 1$ 行列の積（ベクトルの内積）と似ていることに注目してください．