2019 年度 線形代数学 I（生物学コース・物質循環学コース）演習問題 4

担当：境 圭一

1. 次の 2 次正方行列は逆行列を持つか判定せよ．逆行列を持つときは，それを求めよ．（教科書の例 1.4.6, または講義の定理 3.9 参照）

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},\quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix},\quad C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix},\quad D = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1/3 \\ 6 & -1 \end{pmatrix},\quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\quad F = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}\quad (a, b \in \mathbf{R})$$

2. $\theta \in \mathbf{R}$ に対し，$R_\theta := \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ とおく．
   (1) R_θ の幾何学的意味を考えることにより（演習問題 3 の問題 3 を参照），$(R_\theta)^{-1} = R_{-\theta}$ であることを（計算することなく）説明せよ．
   (2) $R_\theta R_{-\theta} = E_2$ であることを，実際に計算して確かめよ．
3. $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ は正則かどうか判定せよ．
4. A を n 次正則行列，$r \in \mathbf{R}, r \neq 0$ とする．次のことを示せ．
   (1) ${}^tA$（転置行列）も正則で，$({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$ である．
   (2) rA（スカラー倍）も正則で，$(rA)^{-1} = \dfrac{1}{r}A^{-1}$ である．
5. $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbf{R}^n$ が **1 次従属**であるとは，$k\boldsymbol{u} + l\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$ かつ $(k, l) \neq (0, 0)$ をみたす $k, l \in \mathbf{R}$ が存在することである．$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbf{R}^2$（縦ベクトル）が 1 次従属であるとき，$2 \times 2$ 行列 $A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{u} & \boldsymbol{v} \end{pmatrix}$ は正則でないことを示せ．

補足.

(i) $n \times n$ 行列 A が**正則行列**であるとは，$AB = E_n, CA = E_n$ をみたす B, C が存在することでした．このようなとき，実は $B = C$ が成り立ち，$AB = E_n$ をみたす B はこの B の他には存在しないことを講義で見ました（つまり，$AB' = E_n$ も成り立つとすると自動的に $B' = B$ になってしまう）．このような B を $B = A^{-1}$ と書き，B の**逆行列**とよびます．気持ちとしては 0 でない実数 a の逆数 $a^{-1} = \dfrac{1}{a}$ に対応するものですが，行列の場合は "$\dfrac{1}{A}$" という書き方はしません．実数の場合と異なり，$A \neq O$ であっても A^{-1} が存在するとは限りません．また上で述べた「$B = C$ となる」「このような B は他にはない」という部分は，実数の逆数についてはほとんど当たり前のことですが，行列の場合には確認を要することです（行列の積は非常に複雑なものだから）．

(ii) 講義では 2×2 行列が正則であるための必要十分条件を求めましたが，この時点ですでに十分めんどうだったと思います．この調子で 3×3 行列，4×4 行列，$\cdots$ が正則かどうかを考えていくのは大変そうです．例えば問題 3 は，$B = (b_{ij})_{1 \leq i,j \leq 3}$ が $AB = E_3$ をみたすと仮定して，9 個の未知数 b_{ij} $(i, j = 1, 2, 3)$ についての 9 本の連立 1 次方程式の解の有無を調べるしかなく（現時点では），これは大変です．この講義の後半では，一般の $n \times n$ 行列について，もっと系統立てて学びます．

なお，1×1 行列 $\begin{pmatrix} a \end{pmatrix}$ が正則であるための必要十分条件は $a \neq 0$ で，このとき $\begin{pmatrix} a \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{a} \end{pmatrix}$ です．

(iii) 問題 4 は教科書の命題 1.10 の一部です．講義の補題 3.8 と同様に証明できます．

(iv) 問題 5 の 1 次従属性については，後期の「線形代数学 II」で学びます．大雑把に言えば「$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ が平行であること」とも言えます（$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ が $\mathbf{0}$ のこともあるので，本当はそれでは不正確）．例えば $k \neq 0$ の場合は $\boldsymbol{v} = -\dfrac{l}{k}\boldsymbol{u}$ となりますから，$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ とおくと，$\boldsymbol{v}$ の成分もわかります．これらを A に代入して $\det A$ を計算してみてください．