2019 年度 線形代数学 I（生物学コース・物質循環学コース）演習問題 5

担当：境 圭一

1. $x_1, \dots, x_n$ に関する連立 1 次方程式

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \tag{$*$}$$

を考える．$A = \left(a_{ij}\right)_{1\le i,j\le n}$, $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ とおくとき，$(*)$ は $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ と表されることを確かめよ．A が正則である，つまり逆行列 A^{-1} が存在するとき，$(*)$ の解 $\boldsymbol{x}$ は

$$\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b}$$

であることを示せ．

2. Gauss の掃き出し法を使って，次の連立 1 次方程式の解を求めよ．

(1) $\begin{cases} x + 3y - z = 2 \\ 2x + y + z = 0 \\ 3x - y + 2z = 1 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} y + 2z = 1 \\ x - y - z = -1 \\ 3x - 2y - z = -2 \end{cases}$ (3) $\begin{cases} 2x + y + 4z = -3 \\ x - 2y - 3z = 1 \\ 3x + y + 5z = 4 \end{cases}$ (4) $\begin{cases} x - y + z + 2w = 5 \\ 2x - 2y - z - w = 4 \\ -x + 2y + 2z + w = 0 \\ 3x + y - 4z - 2w = -3 \end{cases}$

3. n 次正方行列 $A = (a_{ij})_{1\le i,j\le n}$ に対し $\operatorname{Tr} A := \sum_{k=1}^{n} a_{kk}$ とおき，A の**跡** (trace) とよぶ．

(1) 2 次正方行列 A に対し

$$A^2 - (\operatorname{Tr} A)A + (\det A)E_2 = O$$

が成り立つことを示せ．

(2) 3 次の上三角行列 $A = \begin{pmatrix} \alpha & a_{12} & a_{13} \\ & \beta & a_{23} \\ & & \gamma \end{pmatrix}$ に対し

$$A^3 - (\operatorname{Tr} A)A^2 + (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)A - \alpha\beta\gamma E_3 = O$$

が成り立つことを示せ．（ヒント：$(A - \gamma E_3)(A - \beta E_3)(A - \alpha E_3)$ を計算してみるとよい）

補足.

(i) 問題 1 のような状況で，もし A^{-1} がわかっていれば，連立 1 次方程式の解を求める計算は完全に行列の積の計算になります．ポイントは $(*)$ の左辺が $\boldsymbol{a}_j = {}^t\!\begin{pmatrix} a_{1j} & a_{2j} & \cdots & a_{nj} \end{pmatrix}$ $(j = 1, \dots, n)$ と $\boldsymbol{x}$ の内積であることです．行列の積が内積を使って定義されたことによって，連立 1 次方程式と行列が結びつくことになります．

(ii) 一般には連立 1 次方程式の係数行列 A が正方行列でない（つまり，未知数の数と方程式の数が一致しない）場合もあり，また一致したとしても，A が正則でない場合もあります．Gauss の掃き出し法（A に基本変形を施して階段行列にする方法）は，方程式の形によっては必ずしも最短の解き方ではありませんが，どんな方程式に対しても使える一般的な方法であることから，例えば計算機を使うときには有用でしょう．

(iii) 与えられた行列 A に（行）基本変形を施して階段行列にする方法は，同じ行列に対しても 1 通りではありません．しかし，その結果として出てくる階段行列の中のゼロベクトルでない行の数は，途中の変形の方法によらず，最初の行列 A のみに依存して定まります．この値を行列 A の**階数** (rank) とよび $\operatorname{rank} A$ で表します．連立 1 次方程式が解を持つか否か，持ったとして，その自由度はどれくらいか，というのが $\operatorname{rank} A$ に関係しそうだというのは 5/14 の講義でやったとおりです．このあたりのことを今後の講義で詳しく見ます．

行列の基本変形は，ある行列を別の行列に変える操作ですから，変形する前と後の行列を等号で結んではいけません（行列が等しいとは，対応する成分がすべて等しいことでした）．レポートや試験で，A に基本変形を施して B に変えることを “$A = B$” のように書いてある答案を非常によく見かけますが，これは誤りです．例えば “$A \to B$” のように書いてください．

(iv) 問題 3 はレポート問題 1 の解説で述べた Cayley-Hamilton の定理の一部です．(2) で上三角行列としたのは計算の都合で，実際は上三角行列でなくても何らかの公式が成り立ちます．見た目が 2 次，3 次方程式の解と係数の関係に似ていることに注目してください．Cayley-Hamilton の定理の一般的な形は，後期の「線形代数学 II」を学ぶと定式化できるようになります．