2019 年度 線形代数学 I（生物学コース・物質循環学コース）演習問題 6

担当：境 圭一

1. 次の連立 1 次方程式について，（拡大）係数行列の階数を計算し，解の有無，存在する場合は自由度を（方程式を解くことなく）求めよ．また実際に方程式を解き，解の自由度が先に求めたものと一致することを確かめよ．

(1) $\begin{cases} x+y=1 \\ 3x+2y=1 \\ 2x-y=-4 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x+y-z=-1 \\ x-2y+z=0 \\ 4x+y-2z=-3 \end{cases}$ (3) $\begin{cases} x+2y-3z+w=1 \\ 2x+y+2z-w=3 \\ 4x+5y-4z+w=5 \end{cases}$ (4) $\begin{cases} x+2y-3z-w=4 \\ 2x+y-z+w=9 \\ -x+y+2z+3w=6 \\ x+y+z+w=5 \end{cases}$

2. (1) $a,b,c\in\mathbf{R}$ を相異なる実数とするとき，x,y,z に関する連立 1 次方程式

$$\begin{cases} ax+by+cz=1 \\ a^2x+b^2y+c^2z=1 \\ a^3x+b^3y+c^3z=1 \end{cases}$$

の解の自由度を求めよ．a,b,c のうち 2 つが等しい場合，すべて等しい場合はどうか？

(2) $a_1,\dots,a_n\in\mathbf{R}$ を相異なる実数とするとき，$x_1,\dots,x_n$ に関する連立 1 次方程式

$$\begin{cases} a_1x_1+\cdots+a_nx_n=1 \\ a_1^2x_1+\cdots+a_n^2x_n=1 \\ \qquad\vdots \\ a_1^nx_1+\cdots+a_n^nx_n=1 \end{cases}$$

の解の自由度を求めよ．

3. 教科書の命題 2.1 と，問 2.2.1（基本行列に関する諸性質）の証明を完成させよ．

4. A を $m\times n$ 行列とする．A に基本行列 $E_n(i;a), E_n(i,j), E_n(i,j;a)$ を右からかけることは，それぞれ
   (i) A の i 列めを a 倍すること
   (ii) A の i 列めと j 列めを入れ替えること
   (iii) A の i 列めに j 列めの a 倍を加えること

   になることを示せ．

補足．

(i) $x_1,\dots,x_n$ に関する連立 1 次方程式は，$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ とおくとき，$m\times n$ 行列 A と $\boldsymbol{b}\in\mathbf{R}^m$ を使って $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ の形に表せました．5/21 の講義で見たことは，$\mathrm{rank}\,A=\mathrm{rank}\left(A\,\middle|\,\boldsymbol{b}\right)=k$ のとき，$x_1,\dots,x_k$ のうち $n-k$ 個を任意定数 $t_1,\dots,t_{n-k}$ にしておくと，残り k 個は $t_1,\dots,t_{n-k}$ を使った 1 次式で表せる，ということです．これを自由度 $n-k$ の解といいます．$\mathrm{rank}\,A\le m,n$ でしたから自由度は 0 以上で，自由度 0 の解とは，$\boldsymbol{x}$ が任意定数を含まない形で定まる，つまり狭い意味で「方程式が解ける」状況を指します．

(ii) 行に関する基本変形は基本行列を**左から**かけることによって実現されますが，問題 4 にあるように，**右から**かけると**列基本変形**になります．このことからも，行列の積については順序が大切であることがわかります．行列に関しては，行について成り立つことは大体の場合に列についても成り立ちます．今後の講義では行基本変形を使って正方行列の逆行列を求める方法を学びますが，同じことを列基本変形を使って実行することもできます．