2019 年度 線形代数学 I（生物学コース・物質循環学コース）演習問題 7

担当：境 圭一

1. 次の正方行列の階数を計算することにより，これらが正則であることを示せ．また，これらの行列の逆行列を求めよ．

$$A=\begin{pmatrix}3&-1\\2&-1\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}\qquad C=\begin{pmatrix}0&-1&0&0\\1&0&-1&0\\0&1&0&-1\\0&0&1&0\end{pmatrix}\qquad D=\begin{pmatrix}2&1&0&-1\\0&1&3&-1\\-2&0&1&0\\1&-2&-2&1\end{pmatrix}$$

2. A を n 次正方行列とする．
   (1) A の n 行めの成分がすべて 0 である場合を考える．
      (i) どんな n 次正方行列 B に対しても，AB の n 行目はすべて 0 であることを示せ．
      (ii) (i) を用いて，教科書の定理 2.4 の (1) $\Longrightarrow$ (2) の部分を示せ．（ヒント：PA の n 行目がすべて 0 だから，どんな B に対しても $(PA)B$ の (n,n) 成分は 0 になる）
   (2) $\operatorname{rank} A = n$ の場合を考える．QA が階段行列（上三角行列）になるような n 次正方行列 Q を取る．
      (i) QA にさらに基本変形 (I), (III) を施すことにより，QA を単位行列 E_n に変形できることを示せ．
      (ii) (i) を用いて，教科書の定理 2.4 の (2) $\Longrightarrow$ (3) の部分を示せ．（ヒント：変形 $QA \to E_n$ を表す正則行列を R とし，$P = RQ$ とおく）
3. 教科書の命題 2.7 を証明せよ．
4. A, B をそれぞれ m 次，n 次正則行列とするとき，$m+n$ 次正方行列 $C=\begin{pmatrix}A&O_{m,n}\\O_{n,m}&B\end{pmatrix}$ も正則で，逆行列は $C^{-1}=\begin{pmatrix}A^{-1}&O_{m,n}\\O_{n,m}&B^{-1}\end{pmatrix}$ であることを示せ．
5. 階数が 0 の行列は零行列に限ることを示せ．

※以下，今までの復習です

6. $\boldsymbol{u}=\begin{pmatrix}1\\0\\3\\1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}=\begin{pmatrix}1\\1\\-2\\5\end{pmatrix}$ のなす角を求めよ．
7. 次の行列が逆行列を持たないような定数 a, b の値を求めよ．
   (1) $A=\begin{pmatrix}a&1\\-1&a-2\end{pmatrix}$　(2) $B=\begin{pmatrix}b+1&b\\-1&1\end{pmatrix}$
8. 次の行列の階数を求めよ．
   (1) $A=\begin{pmatrix}2&-1\\-1&3\end{pmatrix}$　(2) $B=\begin{pmatrix}1&1&4\\2&1&2\end{pmatrix}$　(3) $C=\begin{pmatrix}3&1\\1&3\\2&2\end{pmatrix}$　(4) $D=\begin{pmatrix}1&-1&0\\-1&3&1\\-1&5&2\end{pmatrix}$

補足．

(i) n 次正方行列 A の逆行列とは，$AB = E_n$, $BA = E_n$ をみたす n 次正方行列 B のことである，というのが元々の定義でした．5/28 の講義で，A, B が n 次正方行列で $AB = E_n$ ならば $B = A^{-1}$ である，つまり $BA = E_n$ も自動的に成り立ってしまう，ということを見ました．この事実を示す過程では行基本変形が重要でした．
行基本変形とは，ある正則行列 P を左からかけることでした．つまり PA は A に何らかの行基本変形を施して得られた行列になります．例えば $E_n(i;a)$ と書いた行列について，$E_n(i;a)A$ は A の i 行めを a 倍した行列でした（これを A' とおきます）．$E_n(i;a)A = A'$ の転置を取ると ${}^t(E_n(i;a)A) = {}^tA' \cdots (*)$ ですが，左辺は転置の性質と $E_n(i;a)$ の定義から

$${}^tA\,{}^tE_n(i;a) = {}^tAE_n(i;a)$$

です．一方で $(*)$ の右辺は，意味を考えれば，${}^tA$ の i 列めを a 倍した行列であることがわかります．つまり

$E_n(i;a)$ を右からかけることは，ある列を a 倍する操作になっています．同じように，基本行列を右からかける操作は列基本変形になっています．このことを踏まえて，講義でやった内容のうち，「行」だったところを「列」に変え，行列の積も「左から」かけていたところを「右から」に変えると，列基本変形に基づいて同様のことができ，次のことを証明できます：

$$A, B \text{ が } n \text{ 次正方行列で } BA = E_n \text{ ならば } B = A^{-1} \text{ である}$$

(ii) 5/28 の講義では，一般の n 次正方行列の逆行列を求める方法も学びました．その計算は一般的に面倒です．2×2 行列のときにやったような公式も後で書きますが，実際に手で計算するには，5/28 の方法がほとんど唯一確実な方法です．出た答ともとの行列との積を取って単位行列になっていれば，出た答が正しいことの確認になります．試験のときは必ずやってみるべきでしょう．