2019 年度 線形代数学 I（生物学コース・物質循環学コース）演習問題 8

担当：境 圭一

1. 4 文字の置換

$$\sigma_1 := \begin{pmatrix}1\,2\,3\,4\\2\,1\,4\,3\end{pmatrix},\quad \sigma_2 := \begin{pmatrix}1\,2\,3\,4\\3\,1\,2\,4\end{pmatrix},\quad \sigma_3 := \begin{pmatrix}1\,2\,3\,4\\1\,4\,2\,3\end{pmatrix} \in S_4$$

について，

(1) 合成 $\sigma_1\sigma_2, \sigma_2\sigma_1, \sigma_3\sigma_1, \sigma_2\sigma_3, (\sigma_1\sigma_2)\sigma_3, \sigma_1(\sigma_2\sigma_3)$ を求めよ．

(2) $k = 1, 2, 3$ に対し，σ_k を互換の合成で表せ．また $\mathrm{sgn}(\sigma_k)$ を求めよ．

(3) $\mathrm{sgn}(\sigma_1\sigma_2), \mathrm{sgn}(\sigma_2\sigma_3), \mathrm{sgn}(\sigma_3\sigma_1)$ を求めよ．これらがそれぞれ $\mathrm{sgn}(\sigma_1)\mathrm{sgn}(\sigma_2), \mathrm{sgn}(\sigma_2)\mathrm{sgn}(\sigma_3), \mathrm{sgn}(\sigma_3)\mathrm{sgn}(\sigma_1)$ に等しいことを確認せよ．

2. n 文字の置換 $\sigma \in S_n$ と $1 \leq i, j \leq n, i \neq j$ について，

$$\sigma(i) = j \iff \sigma^{-1}(j) = i$$

であることを示せ．

3. n を 2 以上の自然数とする．n 個の変数 $x_1, \dots, x_n$ からなる多項式 $f_n(x_1, \dots, x_n)$ を，$\dfrac{n(n-1)}{2}$ 個の 1 次式 $x_i - x_j$ $(1 \leq i < j \leq n)$ の積で定める．例えば

$$\begin{aligned}
f_2(x_1, x_2) &:= x_1 - x_2,\\
f_3(x_1, x_2, x_3) &:= (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_2 - x_3),\\
f_4(x_1, x_2, x_3, x_4) &:= (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4)(x_3 - x_4), \quad \dots.
\end{aligned}$$

n 個の文字を変数とする関数 $F(x_1, \dots, x_n)$ と，n 文字の置換 $\sigma \in S_n$ に対し，関数 σF を

$$(\sigma F)(x_1, \dots, x_n) := F(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)})$$

で定める．例えば $n = 3$ で $F = f_n = f_3, \sigma = \tau_{12}$（互換）のとき，

$$(\tau_{12} f_3)(x_1, x_2, x_3) = f_3(x_2, x_1, x_3) = (x_2 - x_1)(x_2 - x_3)(x_1 - x_3) = -f_3(x_1, x_2, x_3).$$

(1) 各 $\sigma \in S_n$ に対し，$\sigma f_n = \pm f_n$ であることを示せ．

(2) 互換 $\tau_{ij} \in S_n$ に対し，$\tau_{ij} f_n = -f_n$ であることを示せ．

(3) 一般に，$\sigma, \tau \in S_n$ に対し，$\sigma(\tau F) = (\sigma\tau)F$ が成り立つ．なぜなら $y_i = x_{\sigma(i)}$ とおくと

$$\begin{aligned}
\sigma(\tau F)(x_1, \dots, x_n) &= (\tau F)(y_1, \dots, y_n) = F(y_{\tau(1)}, \dots, y_{\tau(n)}) = F(x_{\sigma(\tau(1))}, \dots, x_{\sigma(\tau(n))})\\
&= F(x_{(\sigma\tau)(1)}, \dots, x_{(\sigma\tau)(n)})\\
&= ((\sigma\tau)F)(x_1, \dots, x_n).
\end{aligned}$$

このことと (2) を使って，$\sigma \in S_n$ が k 個の互換の積で表されるとしたとき，k の偶奇は表し方によらないことを示せ．

補足.

(i) n 文字の並べ替えを**置換**とよび，n 文字の置換をすべて集めた集合を S_n と書きます．n 文字の並べ替えは $n!$ 個ありましたから，S_n はちょうど $n!$ 個の要素を含みます．$\sigma \in S_n$ が $\{1, \dots, n\}$ を $\{i_1, \dots, i_n\}$ に並べ替えるとき，$\sigma = \begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\ i_1 & i_2 & \dots & i_n\end{pmatrix}$ と書いたり，$\sigma(k) = i_k$ $(1 \leq k \leq n)$ と書いたりもします．前者の書き方だと，1 行目が $1, 2, \dots, n$ と並ぶのはわかりきっていますから，簡単に $\sigma = \begin{pmatrix}i_1 & i_2 & \cdots & i_n\end{pmatrix}$ と表したりもします．後者は，σ を**写像** $\sigma \colon \{1, 2, \dots, n\} \to \{1, 2, \dots, n\}$ とみなした書き方です．写像については後期の「線形代数学 II」でも扱います．

(ii) 教科書にもある通り，$\sigma = \begin{pmatrix}i_1 & i_2 & \cdots & i_n\end{pmatrix} \in S_n$ に対し，上端の左から k 番目から下に辿って下端の左から i_k 番目に到達する，ということがすべての $1 \leq k \leq n$ に対し成り立つようなあみだくじを必ず作ることができます．

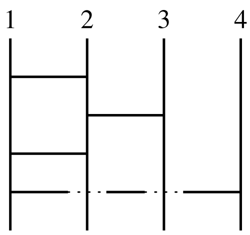

図 1　$\sigma = (3\ 2\ 4\ 1) \in S_4$ に対応するあみだくじの一つ

例えば $\sigma = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \in S_4$ は図 1 のようなあみだくじで実現できます（一番下の点線を含む横線は，間を通らずに左端と右端を結ぶことを表します）．その表し方はいくつもあり得ます．1 つ 1 つの横線が互換を表していて，置換が互換の合成で表せることに対応しています．例えば $\sigma = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \in S_4$ は，図 1 を見ることにより，$\sigma = \tau_{14}\tau_{12}\tau_{13}\tau_{12}$ と表せることがわかります．

(iii) 上で述べたように，すべての置換 σ は互換の合成で表せますが，その表し方はいろいろあります．例えば恒等置換は $e = \tau_{12}^2 = \tau_{13}^2 = \tau_{23}^4 = \cdots$ のように表せる，などです．いくつの互換の合成か，というのも一通りではありませんが，その個数が偶数か奇数か，というところだけは表し方に関係なく決まります．この事実の証明は教科書にも載っていますし，今回の問題 3 のような別証明もあります．気になる人はぜひ自分で証明を勉強してみてください．その個数が偶数のとき σ を**偶置換**，奇数のとき σ を**奇置換**とよびます．σ の**符号** $\mathrm{sgn}(\sigma)$ は

$$\mathrm{sgn}(\sigma) = \begin{cases} +1 & \sigma \text{ が偶置換} \\ -1 & \sigma \text{ が奇置換} \end{cases}$$

と定義されます．

(iv) 集合 S_n は $n!$ 個の要素を持ちますが，各 $\sigma, \tau \in S_n$ に対し，別の $\sigma\tau \in S_n$（合成，または**積**とも呼ぶ）が定まり，次の性質をみたしています：

結合性：　$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \in S_n$ に対し $(\sigma_1\sigma_2)\sigma_3 = \sigma_1(\sigma_2\sigma_3)$

単位元の存在：　$e \in S_n$ を恒等置換とするとき，各 $\sigma \in S_n$ に対し，$\sigma e = \sigma = e\sigma$ が成り立つ

逆元の存在：　各 $\sigma \in S_n$ に対し，$\sigma\sigma^{-1} = e = \sigma^{-1}\sigma$ をみたす $\sigma^{-1} \in S_n$ が定まる

一般に，ある集合 G 上に何らかの積が定まって上の 3 つの条件をみたすとき，G は**群** (group) であるといいます．群は何らかの意味で**対称性**を記述します．S_n は群の典型的な例で，n 次**対称群** (n-th symmetric group) とよばれ，数学のいたるところで登場する重要な群です．

群の他の例として，例えば実数全体の集合 $\mathbf{R}$ は，足し算を「積」とみなすことで群の構造を持ちます．単位元は $e = 0$, $x \in \mathbf{R}$ の逆元は $-x$ です．また 0 でない実数全体の集合 $\mathbf{R} - \{0\}$ は，掛け算を文字通り「積」とみなすことで群となります．この場合の単位元は 1, $x \in \mathbf{R} - \{0\}$ の逆元は $\dfrac{1}{x}$ です．

別の例として，正則な n 次正方行列全体の集合をしばしば GL_n と書き，n 次**一般線形群** (general linear group) とよびます．これは行列の積により群をなします．単位元は単位行列 E_n, $X \in GL_n$ の逆元は逆行列 X^{-1} です．