2019 年度 線形代数学 I（生物学コース・物質循環学コース）演習問題 11

担当：境 圭一

1. 次の行列 A, B について，$\det A, \det B, \det(AB), \det(BA)$ を計算せよ．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 & 1 \\ -4 & -8 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 12 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

2. n を自然数とし，$1 \leq i \neq j \leq n$, また $a \in \mathbf{R}$ とする．
   (1) 基本行列（講義の定義 5.1, または教科書 p. 34 参照）

$$E_n(i; a), \quad E_n(i, j), \quad E_n(i, j; a)$$

   の行列式を求めよ．

   (2) n 次正方行列 A について，講義でやった定理 8.11 または教科書の定理 3.13 を用いて

$$\det(E_n(i; a)A), \quad \det(E_n(i, j)A), \quad \det(E_n(i, j; a)A)$$

   を $\det A$ を用いて表せ．

   (3) (2) と，行基本変形に関する det の性質（講義でやった定理 8.2 など，または教科書の定理 3.6 など）を比較せよ．

   (4) $AE_n(i; a), AE_n(i, j), AE_n(i, j; a)$ を計算し，これらが「列基本変形」を表すことを確かめよ．これを用いて，上の (2), (3) と同様のことを列に関して考えよ．

3. A を n 次正方行列とし，0 以上の整数 n に対し，帰納的に $A^0 := E_n, A^n := AA^{n-1}$ $(n \geq 1)$ と定める．
   (1) $\det(A^n) = (\det A)^n$ を示せ．
   (2) A が正則であるとき，自然数 n に対し，帰納的に $A^{-n} := A^{-1}A^{-(n-1)}$ と定める．$\det(A^{-n}) = (\det A)^{-n}$ を示せ．

補足．講義では，n 次正方行列 A, B に対し $\det(AB) = (\det A)(\det B)$ であることを見ました．特に A が正則で $B = A^{-1}$ の場合を考えると

$$A \text{ が正則（逆行列を持つ）} \implies \det A \neq 0, \quad \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A} = (\det A)^{-1}$$

を得ます．対偶を取ると

$$\det A = 0 \implies A \text{ は正則でない（逆行列を持たない）}$$

ということがわかります．実はこの逆も成立します．そのことは今後証明します．

今回の問題 2 は，行列の基本変形に関する det の性質（講義の定理 8.1 など）と矛盾なく話が進んでいることを確かめる，というものです．$\det(AB) = (\det A)(\det B)$ の証明中で基本変形に関することを使っていますから，問題 2 を定理 8.1 などの証明として採用するわけにはいきません（いわゆる循環論法になってしまう）．論理的には講義でやったような順序でやる必要があります．