2019 年度 線形代数学 I（生物学コース・物質循環学コース）演習問題 13

担当：境 圭一

1. 次の行列が正則（逆行列を持つ）かどうか，行列式を計算することで判定せよ．正則なものについては逆行列を求めよ（以前にやった方法（演習問題 7 の補足参照）と余因子行列を使う方法の両方で計算してみよ）．

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & -3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad C := \begin{pmatrix} a & d & 0 & 1 \\ 0 & b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & c & a \\ 0 & 0 & 0 & d \end{pmatrix} \qquad D := \begin{pmatrix} a & d & 0 & 1 \\ 0 & b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & c & a \\ 1 & 0 & 0 & d \end{pmatrix}$$

2. $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n \in \mathbf{R}^n$ は $\mathbf{0}$ でない縦ベクトルで，$i = 1, \ldots, n$ に対し $|\boldsymbol{u}_i| = 1$, また $i \neq j$ のとき $\boldsymbol{u}_i \cdot \boldsymbol{u}_j = 0$ をみたすとする．n 次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 & \cdots & \boldsymbol{u}_n \end{pmatrix}$$

に対し，${}^tAA$ を計算せよ．これを用いて $\det A$ を計算し，A は正則であることを示せ（ヒント：$\det(AB) = \det A \det B$ と $\det {}^tA = \det A$ を使う）．また A^{-1} を $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ を用いて表せ．

注意．このような A を**直交行列** (orthogonal matrix) とよぶ．

3. $A = \left(a_{ij}\right)_{1 \leq i,j \leq n}$ を n 次正方行列とし，$\widetilde{A}$ を A の余因子行列とする．
   (1) $\det A \neq 0$ のとき $\det \widetilde{A} = (\det A)^{n-1}$ であることを示せ．（ヒント：$A\widetilde{A} = (\det A)E_n$ を使う）
   (2) $\det A = 0$ のとき $\det \widetilde{A} = 0$ であることを示せ．（ヒント：$\widetilde{A}$ が正則であると仮定し矛盾を導くとよい）

補足．余因子展開は行列式を具体的に計算する際にも有効でしたが，理論的にも行列の正則性と行列式の関係を明らかにする上で重要であることがわかりました．$\det A \neq 0$ のとき，A は正則で

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\widetilde{A}, \qquad \text{ただし} \qquad \widetilde{A} = \left(\Delta_{ji}\right) = \begin{pmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{21} & \cdots & \Delta_{n1} \\ \Delta_{12} & \Delta_{22} & \cdots & \Delta_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta_{1n} & \Delta_{2n} & \cdots & \Delta_{nn} \end{pmatrix}$$

となります．$\widetilde{A}$ を A の余因子行列とよびます．

逆行列を具体的に計算する際，上の公式を使うのは効率よい方法ではありません．中間試験のときにやった方法のほうが簡単だと思います．Cramer の公式による連立 1 次方程式の解法についても同様です．これらは，一般的な公式であるという点で理論的には重要ですが，具体的な計算には不向きです．