2019 年度 線形代数学 I（生物学コース・物質循環学コース）演習問題 14

担当：境 圭一

1. (1) $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} \\ 4/5 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3/\sqrt{5} \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2$ を 2 辺とする平行 4 辺形の面積を求めよ．

   (2) $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3$ に対し，$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ を計算せよ．また $\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3$ とするとき，$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ を 3 辺とする平行 6 面体の体積を求めよ．

2. $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ などはすべて $\mathbf{R}^3$ のベクトルとする．次のことを証明せよ．

   (1) $\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a} = -\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$

   (2) $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a} = \mathbf{0}$

   (3) $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}$

   (4) $k \in \mathbf{R}$ をスカラーとするとき，$\boldsymbol{a} \times (k\boldsymbol{b}) = k(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})$

   (5) $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) \cdot \boldsymbol{a} = (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{b} = \det\begin{pmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c} \end{pmatrix}$

   (6) $\det\begin{pmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \end{pmatrix} \geq 0$

   ヒント：(1), (3), (4) は両辺を定義通り計算すればよい．(2) は (1) で $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}$ の場合を考える．(5) は行列式の余因子展開と，列の入れ替えに関する行列式の性質を使う．

（以下，今までの復習です）

3. 次の置換の符号を求めよ．

   (1) $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \in S_3$ (2) $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \in S_4$ (3) $\sigma_3 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix} \in S_5$

4. 次の行列の行列式を求めよ．正則なものについては逆行列を求めよ．

   (1) $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ (2) $B = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ (3) $C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ (4) $D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

補足．正方行列の行列式は，その行列が正則かどうか判定するために導入されたものですが，講義でやったように，幾何学的には面積や体積に対応するものです．講義（や教科書）では目に見える 2 次元，3 次元の場合についてのみ扱いましたが，一般の「n 次元」の場合でも，「体積」にあたるものを適切に定義することにより，同様のことが成立します．3 次元（つまり，3 項ベクトル）の場合にはベクトルの外積が重要でした．講義でやった形の外積は 3 次元特有のもので，他の次元では定義されないことに注意してください．（ただし，3 次元の場合の外積を一般の次元に拡張する方法はあります．詳しくは，例えば「解析入門 II」（杉浦光夫，東大出版）の p. 58 などを参照してください）

前期の「線形代数学 I」で扱った内容をまとめると，だいたい以下のようになると思います：

(i) ベクトルの一般化として行列を導入し，和やスカラー倍，積を定義した

(ii) 連立 1 次方程式との関連，特に解の様子と行列の階数 (rank) の関係を学んだ

(iii) 正方行列の行列式を定義し，行列式が 0 でないことと正方行列が逆行列を持つ（正則である）ことが同値であることを学んだ

ここまでは具体的な計算も多かったこともあり，ある程度は高校数学の延長のような雰囲気で取り組めたのではないかと思います．後期の「線形代数学 II」はだいぶ様子が違ってきて，より抽象的な論理を追うことになります．行列に関することはその基礎となり，特に前期の最後の講義でやった「1 次変換」または「線形写像」として再び登場することになります．前期の内容を忘れないようにして，後期の「線形代数学 II」に備えてください．